

UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
LABORATOIRE J.-A. DIEUDONNÉ

GÉOMÉTRIE SEMI-ALGÈBRE RÉELLE

(Version très provisoire : 17 novembre 2010)

Master 2 - Année 2009-2010

Georges COMTE

GEORGES COMTE : Laboratoire J. - A. Dieudonné UMR CNRS 6621, Université de Nice - Sophia
Antipolis, 28 avenue de Valrose, 06108 NICE Cedex 2, FRANCE.
E-Mail : comte@math.unice.fr



vertissement. Ce cours de Master 2 a été dispensé deux années de suite en 2008 et 2009 à l'Université de Nice-Sophia Antipolis. Il introduit au vocabulaire de la géométrie modérée et ne contient aucun résultat original. Il a peut-être été utile aux étudiants ayant suivi ce cours, les dispensant de la prise de notes, mais le lecteur qui lirait ces quelques lignes tirerait plus de profit des références sur lesquelles il s'appuie exclusivement et qui sont données tout au long du texte.

Sommaire

Chapitre 1. Élimination des quantificateurs - Théorème de Tarski-Seidenberg

1.1. Le théorème de Sturm	2
1.2. Systèmes d'équations et d'inéquations polynomiales	4
1.3. Le théorème de Tarski-Seidenberg	8
1.4. Structures avec élimination des quantificateurs	13

Chapitre 2. Ensembles semi-algébriques

2.1. Définition des ensembles et des applications semi-algébriques	16
2.2. Premières propriétés des ensembles et des applications semi-algébriques	17
2.3. Propriétés des fonctions semi-algébriques	21
2.4. Valeurs critiques des fonctions semi-algébriques, trajectoires du champ gradient d'un polynôme	27

Chapitre 3. Décompositions cellulaires

3.1. Cellules et décompositions cellulaires définissables \mathcal{C}^0	33
3.2. Théorème de décomposition cellulaire et finitude uniforme dans les fibres	35
3.3. Composantes connexes des ensembles définissables	42
3.4. Décompositions cellulaires lisses définissables - Stratifications	43

Chapitre 4. Dimension et caractéristique d'Euler-Poincaré

4.1. Vocabulaire de la géométrie algébrique	49
4.2. Dimensions des ensembles algébriques et semi-algébriques	52
4.3. Caractéristique d'Euler-Poincaré des ensembles définissables	57

Chapitre 5. Triangulations et trivialisations

5.1. Triangulation	63
5.2. Caractéristique d'Euler-Poincaré et triangulations	70
5.3. Type topologique d'un ensemble algébrique	71
5.4. Trivialité topologique	72

Chapitre 6. Spectre réel

6.1. Cônes premiers	75
---------------------	----

Références

xxx

Chapitre 1. Élimination des quantificateurs - Théorème de Tarski-Seidenberg



Le chapitre prépare au résultat géométrique suivant :

“la classe des *ensembles semi-algébriques réels* est stable par projection”,

c'est-à-dire que si X est un *sous-ensemble semi-algébrique* de $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et si $\pi : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est la projection standard, $\pi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = (x_1, \dots, x_n)$, le projeté $\pi(X)$ de X sur \mathbb{R}^n est un *sous-ensemble semi-algébrique* de \mathbb{R}^n . Cette propriété de stabilité par projection est essentielle pour “faire de la géométrie”. Aussi rechercher des classes de sous-ensembles stables par projection est un jeu auquel se livre souvent le géomètre. Une classe particulière de sous-ensembles stables par projection est évidemment $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, l'ensemble de tous les sous-ensembles de tous les espaces

\mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$. Malheureusement cette classe est bien trop vaste et contient des ensembles avec lesquels on peut difficilement faire de la géométrie, au sens où on l'entend ici. La classe des *ensembles semi-algébriques réels* sera quant à elle suffisamment restrictive pour ne pas contenir d'ensembles dont la géométrie est sauvage, ie varie radicalement d'un ensemble à l'autre et cependant suffisamment grande pour contenir ses projetés. Cette propriété remarquable a par exemple pour conséquence que la frontière ou les composantes connexes d'un semi-algébrique sont encore semi-algébriques. Les *ensembles semi-algébriques réels* conservent en gros la même géométrie qu'une de leur sous-classe importante, les *ensembles algébriques réels* (un sous-ensemble algébrique A de \mathbb{R}^n est ainsi défini : $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; P_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, P_k(x_1, \dots, x_n) = 0\}$, avec $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$). Les ensembles algébriques réels ont une géométrie particulièrement modérée, mais en revanche ne sont pas stables par projection comme les semi-algébriques et on ne peut garantir que leur frontière ou leurs composantes connexes restent des ensembles algébriques. Il suffit de penser à l'hyperbole $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy - 1 = 0\}$. Sa projection sur l'axe des x est \mathbb{R}^* , qui bien que bénéficiant d'une géométrie pour le moins simple, n'est pas un ensemble algébrique de \mathbb{R} . De même les composantes connexes de A ne sont pas des ensembles algébriques de \mathbb{R}^2 . On verra - et il s'agit d'une définition possible de la classe semi-algébrique - que la classe des ensembles semi-algébriques est la plus petite classe stable par projection contenant les ensembles algébriques.

Mais la définition des *ensembles semi-algébriques de \mathbb{R}^n* ne sera donnée qu'au chapitre 2. Le chapitre 1, qui ne requiert donc pas de définir au préalable les ensembles semi-algébriques, établit un résultat de nature logique équivalent au résultat géométrique

de stabilité par projection des *ensembles semi-algébriques*. Ce résultat de nature logique, que l'on appelle le théorème de Tarski-Seidenberg, s'énonce brutalement ainsi : "la structure $\mathbf{R} = (\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, <)$ est une structure avec élimination des quantificateurs" (obtenu par Tarski en 1931 et publié seulement en 1951 [Tar], puis par Seidenberg en 1954 [Sei], voir [Lom] pour un résumé historique). Nous allons voir pas à pas dans le chapitre 1 comment se prouve le théorème de Tarski-Seidenberg, et ce n'est qu'au chapitre 2 que nous en tirerons les conséquences géométriques pour les *ensembles semi-algébriques*.

La présentation que nous donnons ici suit celle donnée par M. Coste ([Cos1]). Elle repose sur l'algorithme de Sturm ([Stu]), qui date de 1835 et qui permet de décider combien un polynôme réel d'une seule variable possède de racines sur un intervalle choisi (sans bien sûr les donner). Le procédé amélioré permet ensuite de décider si un polynôme réel, ou mieux un système fini d'égalités et d'inégalités polynomiales admet des solutions ; c'est ainsi que peut s'énoncer le théorème de Tarski-Seidenberg.

1.1. Le théorème de Sturm. Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, que l'on suppose **sans racine multiple pour commencer**. Cette condition équivaut à : P et son polynôme dérivé P' sont premiers entre-eux et cette condition se teste en calculant effectivement le PGCD(P, P') (†).

On associe à P une suite finie de polynômes $(P_0 = P, P_1 = P', \dots, P_k)$, dite **suite de Sturm** de P et de P' , de la même façon que pour le calcul du PGCD de P et de P' , mais ici pour $i > 2$, P_i est l'opposé du reste de la division euclidienne de P_{i-2} par P_{i-1} . Cette suite est strictement décroissante en degré et P_k est le dernier reste non nul dans le processus de division.

Exemple 1. $P(X) = P_0(X) = (X - 1)(X - 2)(X - 3) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$,
 $P'(X) = P_1(X) = 3X^2 - 12X + 11$, $P_2(X) = \frac{2}{3}X - \frac{4}{3}$, $P_3(X) = 1$.

Soit $s_P(a)$ le nombre de changements de signe dans la suite $(P_0(a), P_1(a), \dots, P_k(a))$, lorsque a n'est pas une racine de P (l'apparition d'un zéro ne comptant pas comme un changement de signe).

(†) Rappelons l'algorithme de calcul du PGCD de deux polynômes d'une variable Q_0, Q_1 . On construit la suite finie de polynômes (Q_0, Q_1, \dots, Q_k) de la façon suivante : Q_0 et Q_1 sont les deux polynômes dont on veut calculer le PGCD et pour $i > 2$, Q_i est le reste de la division euclidienne de Q_{i-2} par Q_{i-1} . Cette suite est strictement décroissante en degré et si Q_k est le dernier reste non nul dans ce processus, Q_k est un PGCD de Q_0 et Q_1 .

Exercice 1. Montrer que Q_k divise Q_0 et Q_1 et que si le polynôme D divise Q_0 et Q_1 , D divise aussi Q_k , ie que $\text{PGCD}(Q_0, Q_1) = Q_k$.

Exercice 2. Montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$ possède une racine multiple ssi $\text{PGCD}(P, P')$ est un polynôme non constant.

Exemple 2. Pour P donné dans l'exemple 1, $s_P(-1)$ est 3, puisque :

$$P_0(-1) = -24, P_1(-1) = 26, P_2(-1) = -2, P_3(-1) = 1,$$

et $s_P(4)$ est 0, puisque :

$$P_0(4) = 6, P_1(4) = 11, P_2(4) = 4/3, P_3(4) = 1.$$

Regardons maintenant la variation de la fonction $s_P : \mathbb{R} \setminus \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N}$, \mathcal{R} étant l'ensemble des racines de P . L'entier $s_P(x)$ ne varie qu'au passage d'une racine d'un des polynômes P_i .

- *Comportement des signes de $P_0(x)$ et $P_1(x)$ lorsque x passe une racine r de $P_0 = P$.*

Dans ce cas $P_1(r) = P'(r) \neq 0$, puisque r n'est pas une racine multiple de P . La fonction $P'(x)$ garde ainsi une signe constant en passant r , ce qui oblige $P(x)$ à en changer. Les deux premiers termes P_0 et P_1 de la suite de Sturm de P ont des signes opposés avant le passage de r , et identiques après, comme résumé par les tableaux de variations suivants :

x	r		x	r	
$sgn(P_0(x))$	-	0	+	$sgn(P_0(x))$	+
$sgn(P_1(x))$	+	+	+	$sgn(P_1(x))$	-

- *Comportement des signes de $P_{i-1}(x), P_i(x)$ et $P_{i+1}(x)$ lorsque x passe une racine r de P_i , pour $i > 0$.*

Notons que $P_i(r) = 0$ implique que $P_{i-1}(r) \neq 0$ et $P_{i+1}(r) \neq 0$, car en remontant les égalités $P_{i-1}(r) = P_i(r) = 0$ jusqu'à $P_0(r) = P_1(r) = 0$, on aurait une contradiction. D'autre part, puisque $P_{i-1}(r) = P_i(r) \times Q_i(r) - P_{i+1}(r) = -P_{i+1}(r)$, au voisinage de r les signes de $P_{i-1}(x)$ et $P_i(x)$ sont opposés. En conclusion quelle que soit la variation de signe de P_i au passage de r , le nombre de changements de signe dans la sous-suite $(P_{i-1}(x), P_i(x), P_{i+1}(x))$ de la suite de Sturm est le même avant et après r , comme résumé (par exemple) dans les tableaux suivants de changement de signes :

x	r		x	r	
$sgn(P_{i-1}(x))$	+	+	+	$sgn(P_{i-1}(x))$	-
$sgn(P_i(x))$	+	0	+	$sgn(P_i(x))$	-
$sgn(P_{i+1}(x))$	-	-	-	$sgn(P_{i+1}(x))$	+

On a donc démontré que $s_P(x)$ ne varie qu'au passage d'une racine de P et qu'au passage de chaque racine de P , $s_P(x)$ diminue d'exactlyement une unité, d'où le résultat suivant :

Lemme 1.1 ([Stu]). Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ sans racine réelle multiple et $a < b$ deux réels qui ne sont pas des racines de P . Le nombre de racines réelles de P sur $[a, b]$ est $s_P(a) - s_P(b)$.

Exemple 3. Pour P donné dans l'exemple 1, le nombre de racines de P dans $[-1, 4]$ est $s_P(-1) - s_P(4) = 3 - 0 = 3$.

Considérons maintenant le cas général où P n'est pas nécessairement sans racine multiple. Dans la suite de Sturm de P , le dernier polynôme non nul P_k est un PGCD de P et de P' et n'est pas nécessairement une constante mais divise tous les polynômes P_i . Les racines du polynôme P_0/P_k sont celles de P_0 , puisque P_k est un PGCD de P et de P' . La suite de polynômes $(P_0/P_k, P_1/P_k, \dots, P_{k-1}/P_k, 1)$ est alors telle que :

- Au passage d'une racine de P , le produit $\frac{P_0}{P_k} \frac{P_1}{P_k} = \frac{P_0 P_1}{P_k^2}$ change de signe comme $P_0 P_1$, ie une fois en décroissant (faire le tableau lorsque $P(r) = P'(r) = 0$!).

- Si r est une racine de $\frac{P_i}{P_k}$, pour $i > 0$, $P_{i-1}(r)P_{i+1}(r) \neq 0$, car P_0/P_k et P_1/P_k n'ont pas de racine commune et $P_{i-1}/P_k(r) \cdot P_{i+1}/P_k(r) < 0$, pour les mêmes raisons que dans le cas où P_0 et P_1 sont premiers entre-eux.

Ainsi en notant $S_P(a)$ le nombre de changements de signe de la suite $(P_0/P_k(a), P_1/P_k(a), \dots, P_{k-1}/P_k(a), 1)$, pour a non racine de P , la différence $S_P(a) - S_P(b)$ est le nombre de racines de P dans $[a, b]$. Mais puisque le nombre de changements de signe de la suite $(P_0/P_k(a), P_1/P_k(a), \dots, P_{k-1}/P_k(a), 1)$ est bien sûr celui de la suite $(P_0(a), P_1(a), \dots, P_k(a))$, on a démontré :

Théorème 1.2 ([Stu]). Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a < b$ deux réels qui ne sont pas des racines de P . Le nombre de racines réelles de P sur $[a, b]$ est $s_P(a) - s_P(b)$.

Corollaire 1.3. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$. Le nombre de racines réelles de P est $s_P(-\infty) - s_P(+\infty)$, où $s_P(-\infty)$ est le nombre de changement de signe dans la suite des coefficients directeurs de la suite de Sturm $(P_0(X), P_1(X), \dots, P_k(X))$ de P , et $s_P(+\infty)$ est le nombre de changements de signe dans la suite des coefficients directeurs de la suite $(P_0(-X), P_1(-X), \dots, P_k(-X))$.

Preuve. Puisque le nombre de racines de P est fini, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que sur $] - \infty, a[$, $x \mapsto s_P(x)$ est constant, puisque $s_P(x)$ ne change qu'au passage d'une racine de P . De même il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que sur $]b, +\infty[$, $x \mapsto s_P(x)$ est constant. La quantité $s_P(a) - s_P(b)$ mesurant le nombre de racines réelles de P sur $[a, b]$, $s_P(a) - s_P(b)$ est le nombre de racines réelles de P sur \mathbb{R} tout entier. Quitte à augmenter $|a|$ et $|b|$, on peut supposer que le signe des P_i ne change plus sur $] - \infty, a[$ et $]b, +\infty[$. Dans ces conditions le signe de $P_i(x)$, $x \in] - \infty, a[$, est égal au signe du coefficient directeur de $P_i(-X)$ et le signe de $P_i(x)$, $x \in]b, +\infty[$, est égal au signe du coefficient directeur de $P_i(X)$. Ainsi $s_P(a)$ est le nombre de changements de signe dans $(P_0(-X), P_1(-X), \dots, P_k(-X))$ ie $s_P(-\infty)$ et $s_P(b)$ est le nombre de changements de signe dans $(P_0(X), P_1(X), \dots, P_k(X))$ ie $s_P(+\infty)$. \square

1.2. Systèmes d'équations et d'inéquations polynomiales. On va montrer que l'on peut décider après calculs si un tel système admet des solutions et calculer ce nombre s'il est fini. Pour cela on peut encore calculer des changements de signe dans des

suites de Sturm bien choisies.

1.2.1. On commence par calculer le nombre de solutions du système particulier suivant qui ne comporte qu'une seule équation et une seule inéquation :

$$(S) : P = 0, Q > 0,$$

où $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Construisons pour cela la suite de Sturm (P_0, P_1, \dots, P_k) de $P_0 = P$ et $P_1 = P'Q$. Si a n'est pas une racine réelle de P , on note $s_{P,Q}(a)$ le nombre de changements de signe dans la suite $(P_0(a), P_1(a), \dots, P_k(a))$. Regardons la variation de $s_{P,Q}(x)$ au passage des racines r de P , en fonction du signe de $Q(r)$.

- Si P et $P'Q$ sont premiers entre-eux (ie si P_k est constant non nul),
 - Une racine de P n'est ni racine de P' , ni racine de Q , de sorte que le signe de $P_1 = P'Q$ est constant au voisinage de r , tandis que celui de $P_0 = P$ change nécessairement, suivant les tableaux ci-dessous.

Quand $Q > 0$ au voisinage de r :

x	r		x	r	
$sgn(P_0(x))$	-	0	+	$sgn(P_0(x))$	+
$sgn(P'(x))$	+	+	+	$sgn(P'(x))$	-
$sgn(P'Q(x))$	+	+	+	$sgn(P'Q(x))$	-

Quand $Q < 0$ au voisinage de r :

x	r		x	r	
$sgn(P_0(x))$	-	0	+	$sgn(P_0(x))$	+
$sgn(P'(x))$	+	+	+	$sgn(P'(x))$	-
$sgn(P'Q(x))$	-	-	-	$sgn(P'Q(x))$	+

- Si r est une racine de P_i , pour $i > 0$, comme P_0 et P_1 sont supposés sans racine commune, $P_{i-1}(r) \neq 0$ et $P_{i+1}(r) \neq 0$ et le nombre de changements de signe dans la sous-suite $P_{i-1}(x), P_i(x), P_{i+1}(x)$ est le même avant et après r .

En conclusion la variation de $s_{P,Q}(x)$ n'a lieu qu'au passage des racines de P , et $s_{P,Q}(x)$ décroît d'une unité au passage d'une racine r de P telle $Q(r) > 0$, tandis que $s_{P,Q}(x)$ croît d'une unité au passage d'une racine r de P telle $Q(r) < 0$. Il s'ensuit que $s_{P,Q}(a) - s_{P,Q}(b)$, lorsque a et b ne sont pas des racines de P , est le nombre de racines réelles r de P sur $[a, b]$ telles que $Q(r) > 0$ privé du nombre de racines réelles r de P sur $[a, b]$ telles que $Q(r) < 0$.

- Dans le cas où P et $P'Q$ ne sont pas premiers entre-eux, et où leur suite de Sturm (P_0, P_1, \dots, P_k) se termine par P_k non constant, on considère la suite de Sturm :

$$(P_0/P_k, P_1/P_k = P'Q/P_k, \dots, P_{k-1}/P_k, 1)$$

et $S_{P,Q}(x)$ le nombre de changements de signe en x dans cette suite, x non racine de P . Celui-ci est le même que dans (P_0, P_1, \dots, P_k) . La quantité $S_{P,Q}(a) - S_{P,Q}(b)$ est donc $s_{P,Q}(a) - s_{P,Q}(b)$. Comme $S_{P,Q}(x)$ ne varie qu'au passage des racines de P et non de P_i , $i > 0$, et que cette variation du nombre de changements de signes dans la suite $(P_0/P_k, P_1/P_k, \dots, P_{k-1}/P_k, 1)$ au passage d'une racine r de P décroît d'une unité quand $Q(r) > 0$ et croît d'une unité lorsque $Q(r) < 0$ (faire le tableau !), $S_{P,Q}(a) - S_{P,Q}(b)$ mesure le nombre p de racines de P sur $[a, b]$ en lesquelles Q est > 0 privé du nombre n de racines de P sur $[a, b]$ en lesquelles Q est < 0 .

Enfin notons que d'après ce qui précède, $s_{P,Q^2}(a) - s_{P,Q^2}(b)$ est le nombre $n + p$ de racines réelles de P qui ne sont pas racines de Q . Donc $s_{P,Q}(a) - s_{P,Q}(b) + s_{P,Q^2}(a) - s_{P,Q^2}(b) = 2p$, ie deux fois le nombre de racines de P en lesquelles Q est > 0 .

On résume tout ceci par :

Théorème 1.4. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $a < b$ deux réels qui ne sont pas des racines de P . Soit p le nombre de racines réelles r de P sur $[a, b]$ telles que $Q(r) > 0$ et n le nombre de racines réelles r de P sur $[a, b]$ telles que $Q(r) < 0$. Alors :

$$(i) \quad p - n = s_{P,Q}(a) - s_{P,Q}(b).$$

$$(ii) \quad p = \frac{1}{2}[s_{P,Q}(a) - s_{P,Q}(b) + s_{P,Q^2}(a) - s_{P,Q^2}(b)].$$

Soit π le nombre de racines réelles r de P sur \mathbb{R} telles que $Q(r) > 0$ et ν le nombre de racines réelles r de P sur \mathbb{R} telles que $Q(r) < 0$. Notons $s_{P,Q}(-\infty)$ le nombre de changements de signe dans la suite des coefficients directeurs de la suite de Sturm de P et $P'Q$, où $-X$ est substitué à X , $s_{P,Q}(+\infty)$ le nombre de changements de signe dans la suite des coefficients directeurs de la suite de Sturm de P et $P'Q$. Alors :

$$(iii) \quad \pi - \nu = s_{P,Q}(-\infty) - s_{P,Q}(+\infty).$$

$$(iv) \quad \pi = \frac{1}{2}[s_{P,Q}(-\infty) - s_{P,Q}(+\infty) + s_{P,Q^2}(-\infty) - s_{P,Q^2}(+\infty)].$$

1.2.2. On en vient maintenant au cas général. Soit (S) un système d'égalités et d'inégalités polynomiales :

$$(S) : R_1 = 0, \dots, R_m = 0, Q_1 ? 0, \dots, Q_\ell ? 0$$

où $m, \ell \in \mathbb{N}$, $R_1, \dots, R_m, Q_1, \dots, Q_\ell \in \mathbb{R}[X]$ et où le symbole ? est un des symboles $<, >, \leq, \geq$. On cherche une procédure pour décider si ce système admet des solutions.

• On va dans un premier temps se ramener à un système où ? est $>$ et où $m = 1$, avec $R_1 \neq 0$.

Tout d'abord on observe que dans (S) on peut supposer que ? est le symbole $>$ ou le symbole \geq , quitte à multiplier Q_i par -1 . Ensuite on remarque x est une solution du système $Q \geq 0$ ssi x est une solution d'un des deux systèmes $Q > 0$ ou $Q = 0$, de sorte que décider si $Q \geq 0$ a des solutions revient à décider si $Q > 0$ ou $Q = 0$ a des solutions. Quitte à considérer plus de systèmes, on suppose donc que ? est le symbole $>$. On peut

supposer que $m = 0$ ou $m = 1$, car si $m > 0$, en posant $P = R_1^2 + \dots + R_m^2$, on obtient le système équivalent :

$$(\Sigma) : P = 0, Q_1 > 0, \dots, Q_\ell > 0$$

Enfin si le système est $Q_1 > 0, \dots, Q_\ell > 0$, ie si $P \equiv 0$, l'ensemble des solutions est un ouvert de \mathbb{R} (réunion finie d'intervalles ouverts), qui est soit vide, soit de cardinal infini. On ne peut plus compter dans le dernier cas le nombre de solutions, mais on va déterminer si le système possède bien des solutions. On commence par décider si le système admet des solutions sur des intervalles du type $] -\infty, a[$ (resp. $[b, +\infty[$). Il suffit pour cela que les signes des coefficients directeurs des $Q_i(-X)$ (resp. des $Q_i(X)$) soient tous positifs. Dans ce cas inutile de pousser plus loin les calculs pour décider si le système admet des solutions. Si le système n'admet pas de solution à l'infini et que de plus $Q = Q_1 \dots Q_\ell$ a moins d'une racine, le système n'admet pas de solution sur \mathbb{R} . En revanche si Q possède deux racines a et b distinctes, par le théorème de Rolle, $Q' = 0$ admet nécessairement une solution sur $[a, b]$ et le système : $Q_1 > 0, \dots, Q_\ell > 0$ a un ensemble de solutions non vide ssi tel est le cas pour le système : $Q' = 0, Q_1 > 0, \dots, Q_\ell > 0$.

• On suppose maintenant que notre système est du type de (Σ) et on va montrer comment à partir du Théorème 1.4 on peut compter ses solutions.

Pour $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_\ell) \in \{0, 1\}^\ell$, on note $s^\epsilon = s_{P, Q^\epsilon}(-\infty) - s_{P, Q^\epsilon}(+\infty)$, avec $Q^\epsilon = Q_1^{2-\epsilon_1} \dots Q_\ell^{2-\epsilon_\ell}$. La quantité s^ϵ est le nombre de solutions sur \mathbb{R} du système $P = 0, Q^\epsilon > 0$ moins le nombre de solutions du système $P = 0, Q^\epsilon < 0$. On sait d'après le Théorème 1.4 calculer s^ϵ . On va montrer par récurrence sur ℓ une formule donnant le nombre de solutions σ^ϵ du système $P = 0, (-1)^{\epsilon_1} Q_1 > 0, \dots, (-1)^{\epsilon_\ell} Q_\ell > 0$, pour tout $\epsilon \in \{0, 1\}^\ell$, en fonction des s^ϵ , $\epsilon \in \{0, 1\}^\ell$. On pourra alors calculer $\sigma^{(0, \dots, 0)}$ qui est le nombre de solutions de Σ , à l'aide des quantités $(s^\epsilon)_{\epsilon \in \{0, 1\}^\ell}$ (les étages de cette colonne sont ordonnés par l'ordre lexicographique). Dans ce qui suit $\{r\}$ désigne l'ensemble des racines réelles de P et $\#$ le cardinal.

- Lorsque $\ell = 1$, on a $s^0 = \#\{r; Q_1^2(r) > 0\} - \#\{r; Q_1^2(r) < 0\}$ ie que $s^0 = \#\{r; Q_1(r) \neq 0\}$ et $s^1 = \#\{r; Q_1(r) > 0\} - \#\{r; Q_1(r) < 0\}$. D'autre part $\sigma^0 = \#\{r; Q_1(r) > 0\}$ et $\sigma^1 = \#\{r; Q_1(r) < 0\}$. Il s'ensuit que :

$$s^0 = \sigma^0 + \sigma^1, \quad s^1 = \sigma^0 - \sigma^1.$$

En notant $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{pmatrix} s^0 \\ s^1 \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} \sigma^0 \\ \sigma^1 \end{pmatrix}$$

Noter que A_1 est inversible, ce qui donne bien σ^0 et σ^1 en fonction de s^0 et s^1 .

- Lorsque $\ell = 2$, on a :

$$s^{(0,0)} = \#\{r; Q_1^2(r)Q_2^2(r) > 0\} - \#\{r; Q_1^2(r)Q_2^2(r) < 0\} = \#\{r; Q_1(r)Q_2(r) \neq 0\},$$

$$\begin{aligned}
s^{(0,1)} &= \#\{r; Q_1^2(r)Q_2(r) > 0\} - \#\{r; Q_1^2(r)Q_2(r) < 0\} \\
&= \#\{r; Q_1(r) \neq 0, Q_2(r) > 0\} - \#\{r; Q_1(r) \neq 0, Q_2(r) < 0\}, \\
s^{(1,0)} &= \#\{r; Q_1(r)Q_2^2(r) > 0\} - \#\{r; Q_1(r)Q_2^2(r) < 0\} \\
&= \#\{r; Q_2(r) \neq 0, Q_1(r) > 0\} - \#\{r; Q_2(r) \neq 0, Q_1(r) < 0\}, \\
s^{(1,1)} &= \#\{r; Q_1(r)Q_2(r) > 0\} - \#\{r; Q_1(r)Q_2(r) < 0\}.
\end{aligned}$$

Puis on a :

$$\begin{aligned}
\sigma^{0,0} &= \#\{r; Q_1(r) > 0, Q_2(r) > 0\}, \sigma^{0,1} = \#\{r; Q_1(r) > 0, Q_2(r) < 0\}, \\
\sigma^{1,0} &= \#\{r; Q_1(r) < 0, Q_2(r) > 0\}, \sigma^{1,1} = \#\{r; Q_1(r) < 0, Q_2(r) < 0\}.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{pmatrix} s^\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_1 \\ A_1 & -A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^\epsilon \end{pmatrix}.$$

Noter que $A_2 = \begin{pmatrix} A_1 & A_1 \\ A_1 & -A_1 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_1^{-1} & A_1^{-1} \\ A_1^{-1} & -A_1^{-1} \end{pmatrix}$.

- Supposons que pour $\ell \geq 2$, $(s^\epsilon) = A_\ell(\sigma^\epsilon)$, avec A_ℓ une matrice inversible. on montre qu'alors :

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ s^{\epsilon,0} \\ \vdots \\ s^{\epsilon,1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_\ell & A_\ell \\ A_\ell & -A_\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \sigma^{\epsilon,0} \\ \vdots \\ \sigma^{\epsilon,1} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

et on remarque que $A_{\ell+1} = \begin{pmatrix} A_\ell & A_\ell \\ A_\ell & -A_\ell \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_\ell^{-1} & A_\ell^{-1} \\ A_\ell^{-1} & -A_\ell^{-1} \end{pmatrix}$.

Conclusion. On a démontré qu'il existe un processus calculatoire pour décider si un système général contenant un nombre fini d'équations et d'inéquations polynomiales admet des solutions et calculer leur nombre lorsque celui-ci est fini, ie lorsque le système possède au moins une équation.

1.3. Le théorème de Tarski-Seidenberg. On en vient maintenant au but de ce chapitre, la démonstration du théorème de Tarski-Seidenberg.

Théorème 1.5. ([Tar], [Sei]) Soient n et $m > 0$ deux entiers naturels et $S_1(T, X), \dots, S_m(T, X)$ des polynômes réels en $T = (T_1, \dots, T_n)$ et X . On note $(S(T, X))$ le système :

$$(S(T, X)) : S_i(T, X) ?_i 0,$$

où $?_i \in \{=, >\}$, $i \in \{1, \dots, m\}$. Il existe alors un nombre fini de systèmes d'équations et d'inéquations polynomiales en T , $R^1(T), \dots, R^k(T)$, tels que quel que soit $t \in \mathbb{R}^n$, le système $S(t, X)$ d'inconnu X possède (au moins) une solution ssi un des systèmes $R^j(t)$ est satisfait. En résumé :

$$\exists X S(t, X) \iff R_1(t) \vee \dots \vee R_k(t).$$

Preuve. On calcule les suites de Sturm nécessaires dans le processus de décision de l'existence de solutions du système $S(T, X)$, d'inconnue X . Ce calcul se fait dans $\mathbb{R}(T)[X]$, ie en considérant que X est la variable des polynômes et que leurs coefficients sont dans le corps des fractions rationnelles en T . On divise à chaque étape en deux le processus en fonction de la nullité ou non des coefficients directeurs de chaque polynôme qui apparaît dans ce calcul. Ces coefficients sont des fractions rationnelles en T , mais leur signe qui donne l'existence à la fin du processus (et parfois le nombre, quand celui-ci est fini) de racines étant aussi celui du produit du numérateur par le dénominateur, on aboutit à des systèmes polynomiaux d'équations et d'inéquations $R_j(t) !_j = 0, j \in \{1, \dots, k\}, !_j \in \{=, >\}$ qui déterminent si $S(t, X)$ possède une solution. \square

Exemple 1.6. $S(T_1, T_2, X) : T_1 X^2 + T_2 X + T_3 = 0$.

Notons $P_0(T, X) = T_1 X^2 + T_2 X + T_3$.

(a) Si $T_1 \neq 0$, $P_1(T, X) = \frac{d}{dX} P_0(T, X) = 2T_1 X + T_2$ et $P_2(T, X) = \frac{T_2^2 - 4T_1 T_3}{4T_1}$.

(a') Supposons $\frac{T_2^2 - 4T_1 T_3}{4T_1} \neq 0$.

En fonction des signes de T_1 et de $T_1(T_2^2 - 4T_1 T_3)$, on calcule $s_{P_0}(-\infty) - s_{P_0}(+\infty)$, qui donne le nombre de solutions de $S(T, X)$ en X .

$sign(T_2^2 - 4T_1 T_3)$	+ - + -	$sign(T_2^2 - 4T_1 T_3)$	+ - + -
$P_0 : sign(T_1)$	+ + - -	$P_0 : sign(T_1)$	+ + - -
$P_1 : sign(-2T_1)$	- - + +	$P_1 : sign(2T_1)$	+ + - -
$P_2 : sign\left(\frac{T_2^2 - 4T_1 T_3}{4T_1}\right)$	+ - - +	$P_2 : sign\left(\frac{T_2^2 - 4T_1 T_3}{4T_1}\right)$	+ - - +
$s_{P_0}(-\infty)$	2 1 2 1	$s_{P_0}(+\infty)$	0 1 0 1

Ce qui donne : $s_{P_0}(-\infty) - s_{P_0}(+\infty) = 2 > 0$ ssi $T_2^2 - 4T_1 T_3 > 0$. Donc :

$$T_1 \neq 0, T_2^2 - 4T_1 T_3 > 0 \implies S(T, X) \text{ a des solutions}$$

$$T_1 \neq 0, T_2^2 - 4T_1 T_3 < 0 \implies S(T, X) \text{ n'a pas de solution}$$

(a'') Supposons $\frac{T_2^2 - 4T_1T_3}{4T_1} = 0$. Alors la suite de Sturm est (P_0, P_1) et :

$$\begin{array}{ccc} P_0 : \text{sign}(T_1) & + & - & P_0 : \text{sign}(T_1) & + & + \\ P_1 : \text{sign}(-2T_1) & - & + & P_1 : \text{sign}(2T_1) & + & + \\ s_{P_0}(-\infty) & 1 & 1 & s_{P_0}(+\infty) & 0 & 0 \end{array}$$

Ce qui donne : $s_{P_0}(-\infty) - s_{P_0}(+\infty) = 1 > 0$ ssi $T_2^2 - 4T_1T_3 = 0$. Donc :

$$T_1 \neq 0, T_2^2 - 4T_1T_3 = 0 \implies S(T, X) \text{ a des solutions}$$

(b) Si $T_1 = 0$, $P_0(X) = T_2X + T_3$ et $P_1(T, X) = \frac{d}{dX}P_0(T, X) = T_2$.

(b') Supposons $T_2 \neq 0$. Alors la suite de Sturm est (P_0, P_1) et :

$$\begin{array}{ccc} P_0 : \text{sign}(-T_2) & - & + & P_0 : \text{sign}(T_2) & + & + \\ P_1 : \text{sign}(T_2) & + & - & P_1 : \text{sign}(T_2) & + & + \\ s_{P_0}(-\infty) & 1 & 1 & s_{P_0}(+\infty) & 0 & 0 \end{array}$$

Ce qui donne : $s_{P_0}(-\infty) - s_{P_0}(+\infty) = 1 > 0$. Donc :

$$T_1 = 0, T_2 \neq 0 \implies S(T, X) \text{ a des solutions}$$

(b'') Supposons $T_2 = 0$. Alors $S(T, X)$ est T_3 . Donc :

$$T_1 = 0, T_2 = 0, T_3 = 0 \implies S(T, X) \text{ a des solutions}$$

$$T_1 = 0, T_2 = 0, T_3 \neq 0 \implies S(T, X) \text{ n'a pas de solutions}$$

Tous les cas étant couverts, on a :

$$\exists X S(T, X) \iff$$

$$\begin{array}{l} T_1 \neq 0, T_2^2 - 4T_1T_3 \geq 0 \\ \vee T_1 = 0, T_2 \neq 0 \\ \vee T_1 = 0, T_2 = 0, T_3 = 0 \end{array}$$

Interprétation géométrique pour l'équation $P(X) = 0$. Considérons le cas particulier où $T_1 = 1$ et notons $T_2 = b, T_3 = c$. Nous avons trouvé ci-dessus des conditions polynomiales sur b et c pour que le système polynomial $S(b, c, X) : P_{b,c} = X^2 + bX + c = 0$ ait des solutions x .

Considérons maintenant dans \mathbb{R}^3 , de coordonnées (b, c, x) , l'ensemble :

$$S = \{(b, c, x) \in \mathbb{R}^3; P_{a,b}(x) = 0\}.$$

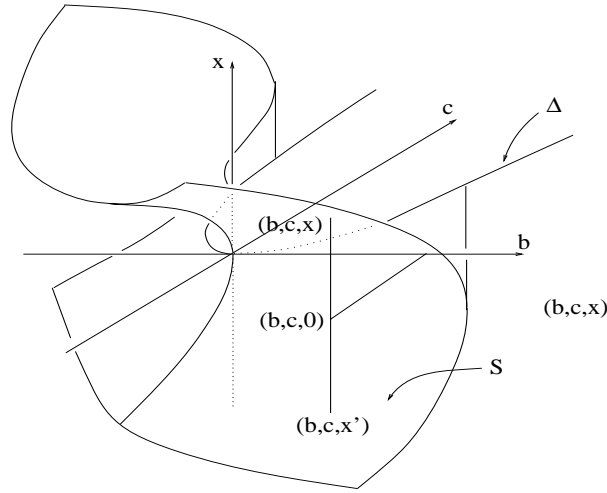


Fig. 1

Étant donné $(b, c) \in \mathbb{R}^2$, x est une racine de $P_{b,c}(X)$ ssi $(b, c, x) \in S$, autrement dit ssi $(b, c, 0)$ est un point de $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ qui appartient au projeté de S sur $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Soit maintenant $(b, c, x) \in S$.

- Supposons que x soit la seule racine réelle de $P_{b,c}(X)$. D'après le théorème des fonctions implicites, si $\frac{\partial P_{b,c}(X)}{\partial X}(b, c, x) = 2x + b \neq 0$, il existe un voisinage $U_{b,c}$ de $(b, c, 0)$ dans $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, un voisinage V_x de x dans $\{0\}^2 \times \mathbb{R}$ et une fonction \mathcal{C}^∞ , $\phi : U_{b,c} \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $S \cap (U_{b,c} \times V_x)$ est le graphe de ϕ au-dessus de $U_{b,c}$. Notons qu'il n'est pas possible que pour $(\beta, \gamma, 0) \in U_{b,c}$ arbitrairement proche de $(b, c, 0)$ et différent de $(b, c, 0)$, $P_{\beta,\gamma}(X)$ ait une racine y telle que $(\beta, \gamma, y) \notin U_{b,c} \times V_x$. En effet, tout d'abord si une suite (β_n, γ_n, y_n) est telle que $(\beta_n, \gamma_n) \rightarrow (b, c) \in \mathbb{R}^2$ et $P_{\beta_n, \gamma_n}(y_n) = 0$, on ne peut avoir $|y_n| \rightarrow \infty$. Soit alors une suite (β_n, γ_n, y_n) telle que $(\beta_n, \gamma_n) \rightarrow (b, c)$, $P_{\beta_n, \gamma_n}(y_n) = 0$, $y_n \in U_{b,c} \times V_x$ et $y_n \rightarrow y$ (quitte à extraire une sous-suite convergente de celle-ci). Par continuité y serait alors une racine de $P_{b,c}$ distincte de x , ce qui contredit notre hypothèse.

Les racines y de $P_{\beta,\gamma}(X) = 0$ pour $(\beta, \gamma, 0) \in U_{b,c}$ sont donc toutes données par $y = \phi(\beta, \gamma)$.

- De même, si $P_{b,c}(X)$ possède deux racines distinctes x et x' , en lesquelles $\frac{\partial P_{b,c}(X)}{\partial X}(b, c, x) = 2x + b \neq 0$ et $\frac{\partial P_{b,c}(X)}{\partial X}(b, c, x') = 2x' + b \neq 0$, on en déduit l'existence de voisinages V_x et $V_{x'}$, respectivement de x et x' dans \mathbb{R} , que l'on peut supposer disjoints quitte à les restreindre, puisque $x \neq x'$ et des voisinages $U_{b,c}$ et $U'_{b,c}$ de $(b, c, 0)$ dans \mathbb{R}^2 tels que, en notant $U = U_{b,c} \cap U'_{b,c}$, les racines de $P_{\beta,\gamma}(X)$ pour $(\beta, \gamma, 0) \in U$ sont donnés par deux graphes $\phi : U \rightarrow V_x$ et $\psi : U \rightarrow V_{x'}$.

- Si (b, c) est tel que $P_{b,c}(X)$ n'a pas de racine réelle, pour (β, γ) dans un voisinage de (b, c) , $P_{\beta,\gamma}(X)$ ne peut pas non plus posséder de racines réelles, par le même argument

de continuité que ci-dessus.

En conclusion le théorème des fonctions implicites montre que le nombre de racines de $P_{b,c}(X)$ est localement constant sur le complémentaire de l'ensemble de paramètres $\Delta \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, Δ défini par $x = -b/2$ et $P_{b,c}(x) = 0$ (ce qui donne $\Delta = \{(b, c, 0); b^2 - 4c = 0\}$). Sur les composantes connexes de $(\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \setminus \Delta$, le nombre de racines de $P_{b,c}(X)$ est donc constant et les racines sont des fonctions \mathcal{C}^∞ des paramètres b, c .

On appelle Δ le discriminant de $P_{b,c}(X)$. Le théorème de Sturm met en évidence Δ et en donne, comme le théorème des fonctions implicites un équation polynomiale. De plus le théorème de Sturm met en évidence les composantes connexes du complémentaire de Δ par des inéquations polynomiales.

Les ensembles S et Δ sont représentés sur la figure 1.

Exercice. Trouver par l'algorithme de Sturm des conditions polynomiales sur les paramètres b, c qui assurent que $P(X) = X^3 + bX^2 + cX + 1$ ait un nombre déterminé de racines. Représenter Σ l'ensemble des points de S en lesquels ne s'applique pas le théorème des fonctions implicites (l'obtenir comme l'intersection de S et de l'ensemble Z des zéros du polynôme $\frac{\partial P}{\partial x}$). Trouver l'équation de Δ . La figure correspondante est donnée ci-dessous.

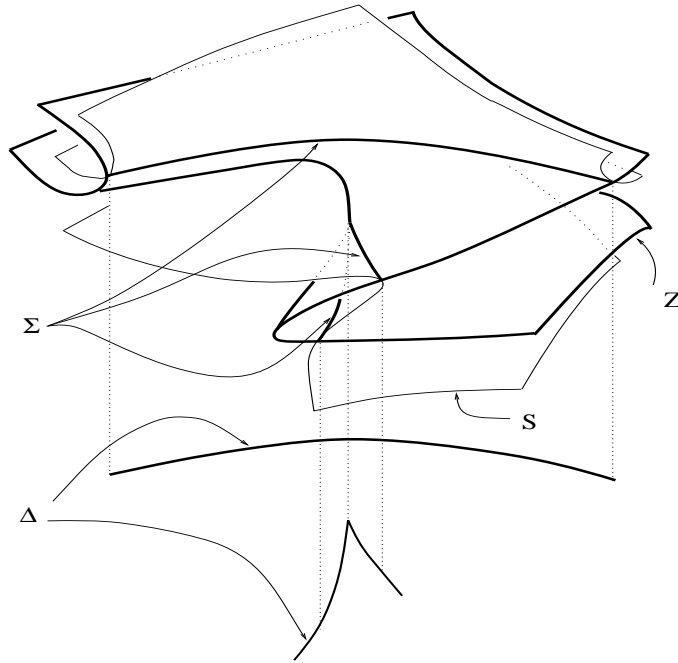


Fig. 2

Remarque. L'objet du 10ème problème de Hilbert est de savoir s'il existe un

algorithme décidant (négativement ou positivement) si une équation *diophantienne*, ie une équation polynomiale à coefficients entiers dont on recherche les solutions entières possède, une solution. La réponse est négative, d'après le théorème de Matiyasevich : l'équivalent arithmétique de l'algorithme de Sturm n'existe pas.

1.4. Structures avec élimination des quantificateurs et structures modèle-complètes. Nous mettons ici en place le contexte logique qui explique le titre du chapitre 1, "Élimination des quantificateurs". Cette section est purement une section de vocabulaire (voir [Cha], [Pre]).

- Une **structure** $\mathbf{A} = (A, (c_h^A)_{h \in H}, (f_i^A)_{i \in I}, (R_j^A)_{j \in J})$ est la donnée :
 - d'un ensemble $A \neq \emptyset$,
 - d'une famille d'éléments de A , appelés les *constants* $(c_h^A)_{h \in H}$, $c_h \in A$,
 - d'une famille applications appelées les *opérations* $f_i^A : A^{n(i)} \rightarrow A$, $n(i) \in \mathbb{N}$. On dit que $n(i)$ est l'*arité* de f_i^A .
 - d'une famille de sous-ensembles d'espaces produits $A^{m(j)}$ appelés les *relations* $R_j^A \subset A^{m(j)}$, $m(j) \in \mathbb{N}^*$.

Remarque. Lorsque $n(i) = 0$, f_i^A est une constante.

Exemple. $A = \mathbb{R}$, $c_0 = 0, c_1 = 1$, $f_1(x, y) = x + y$, $f_2(x, y) = x \cdot y$, $f_3(x) = -x$, $R_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < y\}$.

- À la structure \mathbf{A} on associe le **langage**

$$\mathbf{L} = \{(c_h)_{h \in H}, (f_i)_{i \in I}, (R_j)_{j \in J}, (x_k)_{k \in \mathbb{N}}\}$$
 où :
 - à chaque c_h^A on associe un symbole c_h ,
 - à chaque f_i^A on associe un symbole f_i d'arité $n(i)$,
 - à chaque R_j^A on associe un symbole R_j d'arité $m(j)$,
 - $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un ensemble de symboles : les **variables** du langage.

- Si \mathbf{L} est le langage associé à la structure \mathbf{A} , on dit que \mathbf{A} est une **L-structure**.

Remarque. On peut se donner un langage sans se donner au préalable une structure. Par exemple $\mathbf{L}_{ord} := \{0, 1, +, \cdot, -, <, (x_k)_{k \in \mathbb{N}}\}$ est un langage *a priori*, le **langage des anneaux ordonnés** dont $\mathbf{R} := (\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, -, <)$ est une structure. $\mathbf{L}_{rings} := \{0, 1, +, \cdot, -, (x_k)_{k \in \mathbb{N}}\}$ est le **langage des anneaux** dont $\mathbf{C} := (\mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot, -)$ est par exemple une structure.

Soit \mathbf{L} un langage et \mathbf{A} une **L-structure**. On définit :

- un **L-terme** par une suite finie de symboles, engendrée par les règles :
 - les variables et les constantes sont des **L-termes**,
 - si $t_1, \dots, t_{n(i)}$ sont des **L-termes**, $f_i(t_1, \dots, t_{n(i)})$ aussi.
- Une **L-formule atomique** est une suite finie de symboles, engendrée par les règles :
 - $t_1 = t_2$

- ou $R_j(t_1, \dots, t_m)$, lorsque t_1, \dots, t_m sont des \mathbf{L} -termes.

On peut écrire $R_j(t_1(x_1, \dots, x_\ell), \dots, t_m(x_1, \dots, x_\ell))$ pour $R_j(t_1, \dots, t_m)$ et $t_1(x_1, \dots, x_\ell) = t_2(x_1, \dots, x_\ell)$ pour $t_1 = t_2$, afin de faire apparaître les variables d'une \mathbf{L} -formule atomique.

• Une **L-formule** ou **formule élémentaire** ou **formule du premier ordre** est une suite finie de symboles, engendrée par les règles :

- une \mathbf{L} -formule atomique est une \mathbf{L} -formule,
- si ϕ et ψ sont des \mathbf{L} -formules, $(\neg\phi)$ et $(\phi \vee \psi)$ et $(\phi \wedge \psi)$ aussi,
- si ϕ est une \mathbf{L} -formule et x_k une variable, $(\exists x_k)\phi$ et $(\forall x_k)\phi$ sont des \mathbf{L} -formules.

• Les formules construites sans la dernière règle sont dites **sans quantificateur**. On écrit $\phi(x_1, \dots, x_\ell)$ pour indiquer que les variables libres dans cette formule sont les variables x_1, \dots, x_ℓ .

• Les formules dans lesquelles toutes les variables sont régies par des quantificateurs sont dites des **L-phrases**.

• **Interprétation des formules.** On étend le langage \mathbf{L} en un langage \mathbf{L}_A en ajoutant à \mathbf{L} le symbole a (vu comme une constante), pour chaque $a \in A$; alors \mathbf{A} est une \mathbf{L}_A -structure.

Étant donnée une \mathbf{L}_A -formule $\phi(x_1, \dots, x_\ell)$ et $a_1, \dots, a_\ell \in A$, on définit une \mathbf{L}_A -phrase en remplaçant les variables libres x_1, \dots, x_ℓ respectivement par a_1, \dots, a_ℓ . On obtient une **interprétation** de $\phi(x_1, \dots, x_\ell)$. La \mathbf{L}_A -phrase $\phi(a_1, \dots, a_\ell)$ est alors **vraie** ou **fausse** dans A . On définit la véracité dans A en se donnant la liste des formules atomiques vraies dans A , en effet les interprétations des fonctions et des relations étant donnés on est à même d'attribuer la valeur vrai ou faux à une formule atomique, puis par récurrence sur la complexité des formules définies à partir des formules atomiques.

Lorsque la \mathbf{L}_A -phrase σ est vraie dans \mathbf{A} , on écrit : $\mathbf{A} \models \sigma$ (\mathbf{A} satisfait σ).

La vérité d'une formule ou d'un énoncé ϕ dans \mathbf{A} se définit par récurrence sur la longueur de la formule ϕ , pour se ramener à la vérité de l'interprétation de ϕ dans A . Cette récurrence procède des règles :

- $A \models t_1 = t_2$ ssi $t_1^A = t_2^A$ pour les termes t_1 et t_2 ,
- $A \models R_j(t_1, \dots, t_{m(j)})$ ssi $R_j^A(t_1^A, \dots, t_{m(j)}^A)$ pour les termes $t_1, \dots, t_{m(j)}$,
- $A \models \neg\phi$ ssi $A \not\models \phi$
- $A \models (\phi \wedge \psi)$ ssi $A \models \phi$ et $A \models \psi$
- $A \models (\phi \vee \psi)$ ssi $A \models \phi$ ou $A \models \psi$
- $A \models (\phi \longrightarrow \psi)$ ssi $A \models \phi$ implique $A \models \psi$
- $A \models (\phi \longleftrightarrow \psi)$ ssi $A \models \phi$ équivaut à $A \models \psi$
- $A \models \forall x\phi$ ssi $A \models \phi(x/a)$ pour tout $a \in A$
- $A \models \exists x\phi$ ssi $A \models \phi(x/a)$ pour un $a \in A$

$\phi(x/a)$ signifie que l'on remplace x par a toutes les fois que la variable x apparaît dans la formule ϕ .

Noter que la véracité de formules interprétées dans A est une donnée au même titre que la donnée des opérations et des relations du langage, puisque les relations ou les opérations de la structures sont des ensembles, et leur appartenir ou pas ne souffre pas de preuve. La donnée de la structure revient à se donner les éléments qui appartiennent aux différents ensembles sous-jacents, cette donnée impose ainsi formellement les formules vraies et celles qui ne le sont pas.

Exemple. Soit $\mathbf{A} = (A, \dots)$ une structure où A est un anneau. Dans $\mathbf{L}_{rings\ A}$ La formule : $y^2 = zx$ est une formule atomique et si $\phi(z)$ est : $\forall x \exists y, y^2 = zx$, $\phi(1)$: $\forall x \exists y, y^2 = x$ est une $\mathbf{L}_{rings\ A}$ -phrase, interprétation de ϕ . Celle-ci est vraie ou pas selon le choix de A .

- Si Σ est un ensemble de \mathbf{L} -phrases, et si ϕ est une \mathbf{L} -phrase, on note $\Sigma \vdash \phi$ (Σ prouve ϕ) si l'on peut **formellement prouver ϕ à partir de Σ** . Prouver formellement signifie prouver à l'aide de règles d'inférences portant sur les formules (une preuve formelle à partir de Σ est une suite finie de \mathbf{L} -formules, qui soit sont des phrases de Σ , soit déduites de la formule précédente de la suite par les règles logiques usuelles). On parle donc ici d'une notion plus forte que la vérité d'un énoncé dans une structure donnée, puisque si $\Sigma \vdash \phi$, la phrase ϕ sera en particulier vraie dans toute \mathbf{L} -structure \mathbf{A} dans laquelle toutes les phrases $\sigma \in \Sigma$ sont vraies (une telle structure est appelée un **modèle de Σ**), par compatibilité des règles d'inférence qui prouvent ϕ formellement à partir de Σ et des règles d'inférence qui prouvent dans A .

- Une **théorie sur le langage \mathbf{L}** est un ensemble de \mathbf{L} -phrases (ie de \mathbf{L} -formules sans variable libre). Si \mathcal{C} est une classe de \mathbf{L} -structures, on note $Th(\mathcal{C})$ l'ensemble des \mathbf{L} -phrases vraies pour toutes les \mathbf{L} -structures de \mathcal{C} . Dans le cas où \mathcal{C} est réduite la seule \mathbf{L} -structure \mathbf{A} , on note $Th(\{\mathbf{A}\})$ simplement par $Th(\mathbf{A})$. Il s'agit de l'ensemble des phrases du langage \mathbf{L} vraies dans \mathbf{A} .

- Un **modèle** d'une \mathbf{L} -théorie \mathbf{T} est une \mathbf{L} -structure \mathbf{A} qui satisfait toutes les phrases de \mathbf{T} . On note $\mathbf{A} \models \mathbf{T}$.

- Une théorie \mathbf{T} est **non contradictoire** si elle admet un modèle.

- Une théorie \mathbf{T} (sur le langage \mathbf{L}) est **complète** si pour chacune des \mathbf{L} -phrases ϕ de \mathbf{L} , soit ϕ est vraie dans tous les modèles de \mathbf{T} soit $\neg\phi$ est vraie dans tous les modèles de \mathbf{T} .

Par exemple si \mathbf{A} est une \mathbf{L} -structure alors $Th(\mathbf{A})$ est complète. En effet si ϕ est une phrase de \mathbf{L} , dans \mathbf{A} elle est soit vraie, soit fausse de sorte que soit $\phi \in Th(\mathbf{A})$, soit $\neg\phi \in Th(\mathbf{A})$ et par définition les modèles de $Th(\mathbf{A})$ satisfont donc ϕ ou $\neg\phi$ de la même façon que $Th(\mathbf{A})$.

Deux \mathbf{L} -structures sont dites **élémentairement équivalentes** ssi elles satisfont les mêmes phrases du langage \mathbf{L} . Ainsi une théorie est complète ssi ses modèles sont tous élémentairement équivalents.

Le **théorème de complétude de Gödel** assure que si \mathbf{T} est complète, toutes les phrases de \mathbf{L} , ou leur négation, sont des conséquences logiques de \mathbf{T} :

si ϕ est une phrase de \mathbf{L} , $\mathbf{T} \vdash \phi$ ou $\mathbf{T} \vdash \neg\phi$.

Remarque. Dans le cas où $\mathbf{T} = Th(A)$, le théorème de Gödel assure que les phrases de \mathbf{L} , ou leur négation, sont toutes des conséquences logiques de $Th(A)$, puisque $Th(A)$ est complète. Ceci est sans intérêt dans ce cas, car ici les phrases de \mathbf{L} sont exactement partagées en deux, celles qui sont vraies dans A ie qui sont dans $Th(A)$ et celles qui ne le sont pas. Or les formules de $Th(A)$ sont des conséquences logiques de $Th(A)$, par définition-même, et les phrases ϕ qui ne sont pas dans $Th(A)$ sont telles que $\neg\phi$ sont dans $Th(A)$, elles sont donc aussi des conséquences logiques de $Th(A)$.

Exemple. La théorie \mathbf{T}_{groups} donnée par l'ensemble des phrases du langage des groupes $\mathbf{L}_{groups} = \{-1, \cdot, e\}$ contenant les conséquences logiques des formules suivantes

- $(\forall x)(\forall y)(\forall z)x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- $(\forall x)x \cdot e = e \cdot x$
- $(\forall x)x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$

est incomplet puisque la \mathbf{L}_{groups} -phrase $(\forall x)(\forall y)x \cdot y = y \cdot x$ est indécidable : il existe des groupes abéliens et des groupes non abéliens et ceux-ci, munis de leur \mathbf{L}_{groups} -structure naturelle sont des modèles de \mathbf{T}_{groups} .

• On dit qu'une théorie \mathbf{T} est axiomatisée par l'ensemble de phrases Σ , si \mathbf{T} est conséquence de Σ .

On dit qu'une théorie est **consistante** si elle ne permet pas de prouver à la fois une formule et sa négation. Bien sûr si une théorie \mathbf{T} admet un modèle, elle est consistante. En revanche rien ne dit *a priori* que si \mathbf{T} est consistante, \mathbf{T} admet un modèle. C'est cependant bien le cas, et c'est l'objet du théorème de complétude de Gödel (voir sa preuve ci-dessous). Il y a donc équivalence entre non contradictoire et consistant.

Remarque. À ce stade nous disposons de la prouvabilité formelle d'une phrase ϕ à partir d'un ensemble de phrases Σ , dans le langage \mathbf{L} , que l'on a noté $\Sigma \vdash \phi$ et de la notion de véracité de ϕ dans une structure \mathbf{A} dans laquelle toutes les phrases de Σ sont vraies, ie dans un modèle \mathbf{A} de Σ . On a noté $\mathbf{A} \models \phi$.

On a déjà souligné que les règles d'inférence logique qui permettent de prouver ϕ formellement à partir de Σ donne une preuve de l'interprétation de ϕ dans A à partir de l'ensemble d'énoncés Σ . On a la réciproque suivante :

Théorème de complétude de Gödel (1929). Soit Σ un ensemble de phrases d'un langage \mathbf{L} et ϕ une phrase de \mathbf{L} . On a l'équivalence :

- $\Sigma \vdash \phi$.
- ϕ est vraie dans tout modèle de Σ .

Remarque. Si Σ est une théorie complète et si ϕ est une phrase de Σ , ϕ ou $\neg\phi$ étant vraie dans tout modèle de Σ , on a $\Sigma \vdash \phi$ ou $\Sigma \vdash \neg\phi$.

Preuve. On montre que si ϕ n'est pas formellement démontrable à partir de Σ ,

alors Σ admet un modèle qui ne satisfait pas ϕ . Pour cela il suffit de prouver que si E est un ensemble consistant de phrases contenant toutes ses conséquences formelles, alors E admet un modèle ie est non contradictoire. Car on pourra alors prendre pour E l'ensemble fermé pour les conséquences contenant Σ et $\neg\phi$. Cet ensemble est consistant puisque ϕ n'est pas démontrable à partir de Σ et si E admet un modèle, dans celui-ci la formule ϕ n'est pas satisfaite, puisque $\neg\phi$ l'est. Voir [Cha-Keis] par exemple. \square

Une conséquence du théorème de complétude de Gödel est le théorème de compacité :

Théorème de compacité. *Si \mathbf{T} est une théorie sur le langage \mathbf{L} et si tout sous-ensemble fini de \mathbf{T} possède un modèle, alors \mathbf{T} possède un modèle.*

Remarque. On peut considérer sur la classe des \mathbf{L} -structures la topologie dont les ouverts de base sont :

$$\text{mod}(\phi) = \{\mathbf{A}; \mathbf{A} \text{ est une } \mathbf{L}\text{-structure} \ \& \ \mathbf{A} \models \phi\},$$

où ϕ est une \mathbf{L} -phrase. Maintenant dire que \mathbf{T} est une théorie sur \mathbf{L} telle que $\bigcup_{\phi \in \mathbf{T}} \text{mod}(\phi)$ est un recouvrement de la classe des \mathbf{L} -structures équivaut à dire que $\bigcap_{\phi \in \mathbf{T}} \text{mod}(\neg\phi)$ est vide, ou encore que $\{\neg\phi; \phi \in \mathbf{T}\}$ est sans modèle. Mais d'après le théorème de compacité cela équivaut encore à dire qu'existe un sous ensemble fini \mathbf{T}' de \mathbf{L} -phrases de \mathbf{T} tel que $\{\neg\phi; \phi \in \mathbf{T}'\}$ est sans modèle. Mais alors $\bigcup_{\phi \in \mathbf{T}'} \text{mod}(\phi)$ est un recouvrement fini de la classe des \mathbf{L} -structures.

Preuve du théorème de compacité. On suppose que \mathbf{T} n'admet pas de modèle bien que tout sous-ensemble fini de \mathbf{T} en possède un. Dans ce cas la formule $\exists x \ x \neq x$ est vraie dans tout modèle de \mathbf{T} . Par le théorème de complétude de Gödel, on obtient $\mathbf{T} \vdash \exists x \ x \neq x$. Or une preuve formelle dans \mathbf{L} à partir de \mathbf{T} comporte un nombre fini de formules du langage et un nombre fini de phrases de \mathbf{T} . En notant \mathbf{T}' cet ensemble fini de \mathbf{L} -formules et de phrase de \mathbf{T} , $\mathbf{T}' \vdash \exists x \ x \neq x$ et ainsi l'ensemble fini \mathbf{T}' ne peut avoir de modèle, mais alors il en est de même d'un sous-ensemble fini de \mathbf{T} , celui qui est sous-jacent à \mathbf{T}' . Ce qui est contradictoire de l'hypothèse. \square

- On dit qu'une \mathbf{L} -théorie \mathbf{T} **élimine les quantificateurs**, si toute \mathbf{L} -formule est équivalente modulo \mathbf{T} à une \mathbf{L} -formule sans quantificateur. Précisément, étant donnée une \mathbf{L} -formule $\psi(x)$ (éventuellement quantifiée), il existe une \mathbf{L} -formule $\varphi(x)$, de même variables libres et sans quantificateur, telle que $\mathbf{T} \models \forall x(\psi(x) \longleftrightarrow \varphi(x))$, ie que l'équivalence $(\dagger) \forall x(\psi(x) \longleftrightarrow \varphi(x))$ est vraie dans tous les modèles de \mathbf{T} .

- Étant donné un langage \mathbf{L} et deux \mathbf{L} -structures \mathbf{A} et \mathbf{B} , on dit que \mathbf{A} est une **sous-structure de \mathbf{B}** si l'ensemble A sous-jacent à \mathbf{A} est contenu dans l'ensemble B

(\dagger) L'équivalence de formules dans la structure \mathbf{A} se définit ainsi : $\psi \longleftrightarrow \varphi$ ssi $\mathbf{A} \models (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \neg\psi)$.

sous-jacent à \mathbf{B} et si l'interprétation des symboles de \mathbf{L} dans \mathbf{A} est la restriction de l'interprétation des symboles de \mathbf{L} dans \mathbf{B} . On note $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$. Lorsque $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, on dit que \mathbf{A} est une sous-structure élémentaire de \mathbf{B} si pour toute formule $\phi(x_1, \dots, x_n)$, et pour tout n -uplet $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$, on a :

$$\mathbf{A} \models \phi(a) \iff \mathbf{B} \models \phi(a).$$

On note dans ce cas : $\mathbf{A} \prec \mathbf{B}$. Par induction sur la longueur des formules, il revient au même de dire que pour toute formule $\varphi(x, y)$, et pour tout n -uplet $a \in A^n$, si $\mathbf{B} \models \exists y \varphi(a, y)$ alors il existe $a' \in A^k$ tel que $\mathbf{B} \models \varphi(a, a')$ (Test de Tarski).

• On dit qu'une \mathbf{L} -théorie \mathbf{T} est **modèle-complète** ssi (elle admet un modèle et) étant donnés deux modèles $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ de \mathbf{T} , $\mathbf{A} \prec \mathbf{B}$.

Remarque. Une structure avec élimination des quantificateurs est modèle-complète. En effet, si $\phi(x)$ est une \mathbf{L} -formule et si $a \in A^n$ et $\mathbf{B} \models \phi(a)$, $\phi(a)$ étant équivalente dans \mathbf{B} à une formule φ sans quantificateur, on a $\mathbf{B} \models \varphi$. Mais puisque φ est sans quantificateur, on a également $\mathbf{A} \models \varphi$, et l'équivalence de $\phi(a)$ et φ étant aussi vraie dans \mathbf{A} (qui est un modèle de \mathbf{T}), on a $\mathbf{A} \models \phi(a)$.

Un exemple de théorie modèle-complète et qui n'élimine pas les quantificateurs est donnée par la théorie \mathbf{T} de la \mathbf{L}_{rings} -structure $\mathbf{R} = (\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, -)$. On montre que cette théorie est modèle-complète, en revanche il n'existe aucune formule sans quantificateur équivalente dans tout modèle de \mathbf{T} à la formule $\phi(x) : \exists y, x = y^2$, puisqu'une telle \mathbf{L}_{rings} -formule sans quantificateur aurait seulement x pour variable libre et serait donc obtenue comme disjonctions de conjonctions d'égalités et de non égalités polynomiales en la variable x à coefficients entiers (1 étant sans torsion dans tout modèle de \mathbf{R}) qui devrait donner les réels $x \geq 0$ dans le modèle \mathbf{R} , ce qui ne se peut (pour voir cela on peut remarquer que si un polynôme de la seule variable X à coefficients entiers ne s'annule pas pour un élément $x = a + b\sqrt{2}$ de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, il ne s'annule pas non plus pour son conjugué $\bar{x} = a - b\sqrt{2}$. On peut alors choisir x de sorte que $x > 0$ et $\bar{x} < 0$). Bien entendu dans \mathbf{L}_{ord} la théorie \mathbf{T}' de $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, -, \geq)$ élimine les quantificateurs et en particulier la formule $\phi(x)$ équivaut dans tout modèle de \mathbf{T}' à la formule non quantifiée : $x \geq 0$. On verra ci-dessous qu'un modèle de \mathbf{T}' est un corps réel clos, dans lequel le cône positif $\{x; x \geq 0\}$ est par définition l'ensemble des carrés.

Remarque. On montre que la théorie \mathbf{T} est modèle-complète ssi pour toute \mathbf{L} -formule $\phi(x)$ existe une formule existentielle $\epsilon(x)$ (ie ne comportant que le quantificateur \exists) telle que : $\mathbf{T} \models \forall x(\phi(x) \iff \epsilon(x))$. (On peut aussi énoncer la même définition d'une théorie modèle complète en remplaçant le quantificateur existentiel par le quantificateur universel, car si $\neg\phi(x)$ est équivalente à une formule existentielle, $\phi(x)$ est équivalente à une formule universelle).

• On dit que $X \subset A^\ell$ est **A-définissable** s'il existe une \mathbf{L} -formule $\phi(x, y)$, avec $x = (x_1, \dots, x_\ell)$, $y = (y_{\ell+1}, \dots, y_{\ell+k})$ et $b \in A^k$ tel que :

$$X = \{a \in A^\ell; \mathbf{A} \models \phi(a, b)\}.$$

Lorsque de plus $\phi(x, y)$ est sans quantificateur, on dit que X est **A-constructible**, ie combinaison booléenne finie d'ensembles atomiques **L-définissables**.

Remarque. Une **L-structure** admet l'**élimination des quantificateurs** ssi tout ensemble **A-définissable** est **A-constructible** ssi toute projection de constructible est constructible.

Une **L-structure** est **modèle-complète** sur **L** ssi tout ensemble **A-définissable** est la projection d'un **A-constructible**.

• **Exemple (la théorie des corps réels clos)** : Soit $\mathbf{L}_{ord} := \{0, 1, +, -, \cdot, <\}$ le langage des anneaux ordonnés et \mathbf{R} la \mathbf{L}_{ord} -structure

$$\mathbf{R} = \{\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, <\}.$$

On montre (**principe de transfert de Tarski**) que si $\mathbf{A} = \{A, 0, 1, +, -, \cdot, <\}$ est une \mathbf{L}_{ord} -structure, élémentairement équivalente à \mathbf{R} , alors A est un corps réel clos, c'est-à-dire un corps ordonné dans lequel tout élément positif est un carré et tel que tout polynôme, à une variable, à coefficients dans ce corps et de degré impair possède une racine (cf Chapitre 6). Les axiomes des corps réels clos sont donnés par les \mathbf{L}_{ord} -formules suivantes, de sorte que si A est élémentairement équivalent à \mathbf{R} , A satisfait aussi ces axiomes, et donc est un corps réels clos :

- Axiomes de corps ordonné. Par exemple :

$$\forall x \exists y (x + y = 0)$$

$$\forall x (x \neq 0 \longrightarrow \exists y, xy = 1)$$

$$\forall xyz (x < y \wedge 0 < z \longrightarrow xz < yz)$$

$$\forall xyz (x < y \longrightarrow x + z < y + z)$$

- Le cône positif est l'ensemble des carrés :

$$\forall x (0 < x \longrightarrow \exists y, x = y^2)$$

- Tout polynôme de degré impair possède une racine :

$$\forall x_0 x_1 \cdots x_{2n} (\exists y, y^{2n+1} + x_{2n} z^{2n} + \cdots + x_0 = 0)$$

L'implication réciproque est plus difficile à obtenir : si la \mathbf{L}_{ord} -structure satisfait les axiomes des corps réels clos, celle-ci est élémentairement équivalente à \mathbf{R} . Il s'agit en réalité d'une conséquence du théorème de Tarski-Seidenberg, qui dit que la théorie des corps réels clos élimine les quantificateurs :

Preuve du principe de transfert de Tarski. Il s'agit de montrer que si une structure \mathbf{A} est un modèle de la théorie $\mathbf{T}_{\mathbf{rcf}}$ des corps réels clos, ie est une structure dans laquelle toutes les phrases de la théorie ci-dessus des corps réels clos est vraie, alors cette structure est élémentairement équivalente à \mathbf{R} . Soit donc φ une phrase de $\mathbf{L}_{\mathbf{ord}}$ telle que $\mathbf{A} \models \varphi$. Comme la théorie des corps réels clos élimine les quantificateurs (c'est le théorème de Tarski-Seidenberg, prouvé dans \mathbf{R} dans ce chapitre, mais qui se prouve de la même façon dans tout corps réel clos, cf le dernier chapitre) il existe une phrase Ψ de $\mathbf{L}_{\mathbf{ord}}$ sans quantificateur telle que :

$$\mathbf{T}_{\mathbf{rcf}} \models (\varphi \longleftrightarrow \Psi)$$

On a donc $\mathbf{A} \models \varphi$ qui implique $\mathbf{A} \models \Psi$. Mais puisque Ψ est sans quantificateur, on a aussi $\mathbf{Q} \models \Psi$, car $\mathbf{Q} := (\mathbb{Q}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, +, -, \cdot, <)$ est une sous-structure commune de \mathbf{A} (et \mathbf{R}), un corps réel clos étant de caractéristique nulle. Maintenant $\mathbf{Q} \models \Psi$ implique $\mathbf{R} \models \Psi$, et puisque \mathbf{R} est un corps réel clos, on obtient $\mathbf{R} \models \varphi$.

L'implication $\mathbf{R} \models \varphi$ implique $\mathbf{A} \models \varphi$ s'obtient par symétrie des arguments. \square

Les ensembles \mathbf{R} -constructibles sont les combinaisons booléennes finies d'ensembles de la forme $\{x \in \mathbb{R}^\ell; f(x) \diamond 0\}$, où $\diamond \in \{=, <\}$ et $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_\ell]$. On les appelle au chapitre 2 les **ensembles semi-algébriques réels**, tandis que les ensembles \mathbf{R} -définissables sont les combinaisons booléennes finies d'ensembles du même type mais où apparaissent des suites finies de quantificateurs portant sur des variables, par exemple : $\{x \in \mathbb{R}^\ell; \exists y \forall z, w \exists t f(x, y, z, w, t) \diamond 0\}$, où $f \in \mathbb{R}[x, y, z, w, t]$ et $\diamond \in \{=, <\}$. Le théorème de Tarski-Seidenberg dans la version du théorème 2.3 assure que les seconds sont aussi les premiers.

Chapitre 2. Ensembles et applications semi-algébriques



On définit ici les ensembles semi-algébriques et les applications semi-algébriques. Ces dernières sont les applications dont le graphe est un ensemble semi-algébrique. On en étudie les propriétés élémentaires qui découlent du théorème de Tarski-Seidenberg. Celui-ci est énoncé de deux façons nouvelles : la première au Théorème 2.2 qui dit que la classe \mathcal{SA} est stable par projections, la seconde au Théorème 2.3 qui dit que la \mathbf{L}_{ord} -structure \mathbf{R} définie à la section 1.4 est avec élimination des quantificateurs. On montre ainsi que les semi-algébriques sont stables par les opérations topologiques élémentaires : l'adhérence, la frontière, l'intérieur. En revanche pour montrer que les composantes connexes d'une semi-algébrique sont en nombre fini et sont semi-algébriques, il faudra disposer du théorème de décomposition cellulaire, énoncé et prouvé au chapitre 3. Enfin on met à jour des propriétés remarquables des fonctions semi-algébriques (ie des applications semi-algébriques à valeurs dans \mathbb{R}) : leur croissance polynomialement bornée, qui a pour conséquence l'inégalité de Lojasiewicz (Théorème 2.7) et le Théorème 2.9 de monotonie. Dans la dernière section on montre que les valeurs critiques d'une fonction semi-algébrique sont isolées et que l'inégalité de Lojasiewicz a des conséquences sur le longueur des trajectoires d'un champ gradient de polynôme, au voisinage d'une singularité isolée de ce champ

2.1. Définition des ensembles et des applications semi-algébriques. Nous commençons par la définition des ensembles semi-algébriques réels et des applications semi-algébriques, la seconde se ramenant à la première.

Définition (ensembles et applications semi-algébriques). Soit $n \geq 0$ un entier. Un ensemble A de \mathbb{R}^n est appelé un (sous-)ensemble semi-algébrique de \mathbb{R}^n ssi il existe $p, k \in \mathbb{N}$ et des polynômes $P_{i,j} \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, $i \leq p, j \leq k$, tels que :

$$A = \bigcup_{i=1}^p \bigcap_{j=1}^k \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; P_{i,j}(x_1, \dots, x_n) ?_{i,j} 0\},$$

où $?_{i,j} \in \{=, >\}$. Les ensembles semi-algébriques de \mathbb{R}^n sont notés $\mathcal{SA}(n)$. Les ensembles semi-algébriques réels sont les éléments de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{SA}(n)$.

Soient $m \in \mathbb{N}$ et A un semi-algébrique de \mathbb{R}^n , $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. On dit que l'application f est semi-algébrique ssi son graphe $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+m}; x \in A\}$ est un semi-algébrique de \mathbb{R}^{n+m} .

Remarques. - Quitte à changer le signe des polynômes $P_{i,j}$ et à modifier le nombre d'intersections et de réunions, le symbole $?_{i,j}$ pourrait être, dans la définition ci-dessus, un élément de $\{=, \geq, >, \leq, <\}$ plutôt que de $\{=, >\}$.

- On pourrait autoriser un ordre quelconque d'intersections et de réunions dans la définition d'un semi-algébrique, mais on peut toujours se ramener à l'écriture de la définition ci-dessus, en regroupant convenablement les ensembles. De même on peut toujours obtenir un semi-algébrique comme une réunion d'ensembles du type :

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; P(x_1, \dots, x_n) = 0, Q_j(x_1, \dots, x_n) > 0, j = 1, \dots, k\}.$$

- Dans le langage de la théorie des modèles, \mathbf{L}_{ord} étant le langage $\{0, 1, +, \cdot, -, <, (x_k)_{k \in \mathbb{N}}\}$ des anneaux ordonnés, les ensembles semi-algébriques sont les ensembles constructibles de la \mathbf{L}_{ord} -structure $\mathbf{R} := (\mathbb{R}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, +, \cdot, -, <)$, c'est-à-dire construits par les combinaisons booléennes finies de \mathbf{L}_{ord} -formules atomiques.

Rappel. - Un ensemble algébrique réel A de \mathbb{R}^n est l'intersection des zéros d'un nombre fini de polynômes $P_j \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$:

$$A = \bigcap_{j=1}^k \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; P_j(x_1, \dots, x_n) = 0\}.$$

On note \mathcal{A} la classe des ensembles algébriques réels.

- Un ensemble algébrique complexe A de $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ est l'intersection des zéros d'un nombre fini de polynômes $P_j \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. Il s'agit aussi par l'identification $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ d'un ensemble algébrique réel de \mathbb{R}^{2n} .

- La réunion et l'intersection d'un nombre fini d'ensembles algébriques est un ensemble algébrique (car $\{P(x_1, \dots, x_n) = 0\} \cup \{R(x_1, \dots, x_n) = 0\} = \{P \cdot R(x_1, \dots, x_n) = 0\}$). En revanche le complémentaire d'un ensemble algébrique n'est pas en général un ensemble algébrique (penser à un ensemble algébrique strict de \mathbb{R}).

2.2. Premières propriétés des ensembles et des applications semi-algébriques. On fait une liste de propriétés qui découlent directement de la définition des ensembles semi-algébriques réels (proposition 2.1) puis on remarque que le théorème de Tarski-Seidenberg assure la stabilité des ensembles semi-algébriques par projection (Théorème 2.2), c'est ce que l'on appelle la version géométrique du Théorème de Tarski-Seidenberg. Nous en donnons aussi la version logique (Théorème 2.3) qui permet de montrer aisément que les formules quantifiées du premier ordre dans le langage des anneaux ordonnés avec coefficient dans \mathbb{R} définissent des sass.

Proposition 2.1. (i)- La réunion finie, l'intersection finie et le complémentaire d'un ensemble semi-algébrique réel est un ensemble semi-algébrique réel. En résumé une combinaison booléenne finie d'ensembles semi-algébriques réels est un ensemble semi-algébrique réel.

(ii)- Le produit d'un semi-algébrique de \mathbb{R}^n et d'un semi-algébrique de \mathbb{R}^m est un semi-algébrique de \mathbb{R}^{n+m} .

(iii)- Un sous-ensemble semi-algébrique de \mathbb{R} est une réunion finie d'intervalles ouverts (bornés ou non) et de singletons. On dit que la \mathbf{L}_{ord} -structure $\mathbf{R} := (\mathbb{R}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, +, \cdot, -, <)$ est *o-minimale* (le "o" vient de l'anglais "order").

(iv)- Les ensembles semi-algébriques contiennent les ensembles algébriques réels et complexes.

Preuve. (ii) Soit A un semi-algébrique de \mathbb{R}^n et B un semi-algébrique de \mathbb{R}^n . Si A est défini par des réunions et des intersections finies d'ensembles données par des équations et des inéquations polynomiales, il suffit de d'ajouter m variables à ces systèmes pour obtenir $A \times \mathbb{R}^m$, ce qui en fait encore un semi-algébrique. De même $\mathbb{R}^n \times B$. On observe ensuite que $A \times B = (A \times \mathbb{R}^m) \cap (\mathbb{R}^n \times B)$. \square

Remarque. Il résulte en particulier de (i) et (iii) qu'un spirale dans \mathbb{R}^2 n'est pas un semi-algébrique, puisque son intersection avec une droite passant par le point autour duquel cet ensemble spirale est un nombre infini de points. Or une droite est un semi-algébrique, et donc si la spirale l'était son intersection avec cette droite serait un semi-algébrique de \mathbb{R} .

Théorème 2.2 (Tarski-Seidenberg forme géométrique). (i)- Les ensembles semi-algébriques sont stables par projection, ie que si $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ est un semi-algébrique, $\pi : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la projection standard sur les n premières composantes, alors $\pi(A)$ est un semi-algébrique de \mathbb{R}^n .

(ii)- La classe des semi-algébriques est la plus petite classe contenant les ensembles algébriques qui soit stable par projection et opérations booléennes finies (ie réunions, intersections finies et complémentaire).

Preuve. Pour (i) il suffit supposer que $m = 1$, car une projection de fibre de dimension m est la composée de projections de fibre de dimension 1. On remarque que :

$$\pi(A) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \exists y \in \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n, y) \in A\}.$$

En écrivant :

$$A = \bigcup_{i=1}^{\ell} \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; P_i(x_1, \dots, x_n) = 0, Q_{i_j}(x_1, \dots, x_n) > 0, j = 1, \dots, \ell_i\},$$

le théorème de Tarski-Seidenberg assure que l'ensemble des (x_1, \dots, x_n) pour lesquels existe (au moins) une solution (x_1, \dots, x_n, y) au système $S_j : P_i = 0, Q_{i_1} > 0, \dots, Q_{i_{\ell_i}} > 0$ est la réunion des ensembles de solutions de systèmes d'équations et d'inéquations polynomiales en $(x_1, \dots, x_n) : R_{i_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, R_{i_{k_i}}(x_1, \dots, x_n)$. Il s'ensuit que $\pi(A)$ est une réunion de réunions de tels ensembles et donc est semi-algébrique.

Montrons maintenant (ii). La classe \mathcal{SA} contient la classe \mathcal{A} , par définition même et est stable par projection et nombre fini d'opérations booléennes. Inversement si une classe est stable par les projections et contient les ensembles algébriques, elle contient aussi les ensembles $A_Q = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; Q(x_1, \dots, x_n) \geq 0\}$, où $Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. En effet, si $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, on a :

$$A_Q = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \exists r \in \mathbb{R}, Q(x_1, \dots, x_n) = r^2\}$$

$$= \pi(\{(x_1, \dots, x_n, r) \in \mathbb{R}^{n+1}; Q(x_1, \dots, x_n) - r^2 = 0\}).$$

Notre classe étant de plus stable par les opérations booléennes, elle contient les différences et donc les ensembles du type $\{Q > 0\}$. Finalement elle contient aussi les ensembles semi-algébriques. \square

Remarque. il n'est pas vrai que les ensembles algébriques, contrairement aux semi-algébriques, sont stables par complémentaire (les ensembles algébriques de \mathbb{R} sont les ensembles de cardinaux finis ou \mathbb{R}). De même il n'est pas vrai la projection d'un ensemble algébrique réel est encore algébrique réel (la projection de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 1\}$ sur $\mathbb{R} \times \{0\}$ est \mathbb{R}^* .)

On vient de voir que le théorème de Tarski-Seidenberg assure que le projeté d'un ensemble semi-algébrique est un semi-algébrique. Mais ce qui est utilisé dans la preuve du théorème est la possibilité d'"éliminer le quantificateur \exists " dans les formules quantifiées définies à partir d'un semi-algébrique. Précisément on énonce :

Théorème 2.3 (Tarski-Seidenberg forme logique). Soit Φ une formule logique définissant un semi-algébrique (ie du premier ordre dans \mathbf{L}_{ord} mais sans quantificateurs, ne faisant intervenir que des polynômes réels en les variables X_1, \dots, X_{n+m} , les signes $=, >, <$ et les symboles \vee, \neg, \wedge). Les $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ qui vérifient une formule quantifiée du type :

$$!_1 x_{n+1}, \dots, !_m x_{n+m} \Phi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}),$$

où $!_j$ est le quantificateur \exists ou bien le quantificateur \forall , $j = 1, \dots, m$, définissent aussi un semi-algébrique de \mathbb{R}^n . Autrement dit les \mathbf{R} -définissables sont les \mathbf{R} -constructibles, ou encore \mathbf{R} est à élimination des quantificateurs.

Preuve. En réalité le Théorème de Tarski-Seidenberg prouve qu'une formule ne contenant qu'un seul quantificateur \exists est équivalente à une formule sans aucun quantificateur. Mais la stabilité des semi-algébriques par complémentaire permet de ramener toute formule à une formule ne comportant que le quantificateur existentiel, en usant un nombre fini de fois la règle $\forall x \Psi \iff \neg(\exists x \neg \Psi)$. \square

On tire de cette formulation du théorème de Tarski-Seidenberg les conséquences suivantes :

Corollaire 2.4. (i)- Si $A \in \mathcal{SA}(n)$, \bar{A} , $\partial A = \bar{A} \setminus A$, $\text{int}(A) = A \setminus \partial A$ sont dans $\mathcal{SA}(n)$.

(ii)- Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ est semi-algébrique, $f(A)$ est un semi-algébrique de \mathbb{R}^m et si B est un semi-algébrique de \mathbb{R}^m , $f^{-1}(B)$ est un semi-algébrique de \mathbb{R}^n .

(iii)- Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $g : f(A) \rightarrow \mathbb{R}^p$ sont semi-algébriques, $g \circ f$ est semi-algébrique. Si f est injective, $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$ est semi-algébrique.

(iv)- Soit U est un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction semi-algébrique. Les ensembles des points de U en lesquels f est continue ou admet la dérivée partielle

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ou est différentiable sont des semi-algébriques de \mathbb{R}^n . De plus sur les ensembles sur lesquels elles sont définies les dérivées partielles et la différentielle sont des applications semi-algébrique.

Preuve. (i) Montrons par exemple que $\bar{A} \in \mathcal{SA}(n)$. On a :

$$\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^n; \forall \epsilon \in \mathbb{R}, \exists y \|x - y\|^2 \leq \epsilon^2 \wedge y \in A\}.$$

Or la formule $\|x - y\|^2 \leq \epsilon^2 \wedge y \in A$ définit bien un semi-algébrique, car $\|x - y\|^2 \leq \epsilon^2$ est une inégalité polynomiale. D'après le Théorème 2.3, \bar{A} étant un \mathbf{R} -définissable, il s'agit d'un \mathbf{R} -constructible et donc d'un semi-algébrique. Remarquons que l'on peut aussi se ramener explicitement à la forme 2.2 du théorème de Tarski-Seidenberg pour prouver que \bar{A} est un semi-algébrique quand A est un semi-algébrique. Il suffit de transformer par la règle $\forall x \Psi \longleftrightarrow \neg(\exists x \neg \Psi)$ la formule quantifiée définissant \bar{A} en une formule ne comportant que des quantificateurs existentiels et de voir ensuite une succession de projections. Autrement dit on redémontre le théorème 2.3 dans le cas particulier de \bar{A} . On a :

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \mathbb{R}^n \setminus \{x; \exists \epsilon \in \mathbb{R}, \forall y \|x - y\|^2 > \epsilon^2 \vee y \notin A\} \\ &= \mathbb{R}^n \setminus \pi_1(\{(x, \epsilon); \forall y \|x - y\|^2 > \epsilon^2 \vee y \notin A\}) \\ &= \mathbb{R}^n \setminus \pi_1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus \{(x, \epsilon); \exists y \|x - y\|^2 \leq \epsilon^2 \wedge y \in A\}) \\ &= \mathbb{R}^n \setminus \pi_1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus \pi_2(\{(x, \epsilon, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \|x - y\|^2 \leq \epsilon^2 \wedge y \in A\})). \end{aligned}$$

L'ensemble $\{(x, \epsilon, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \|x - y\|^2 \leq \epsilon^2 \wedge y \in A\}$ étant un semi-algébrique de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et les semi-algébriques étant stables par projection (par le théorème 2.2) et prise de complémentaire (par définition), \bar{A} est un bien semi-algébrique de \mathbb{R}^n .

Comme on a $\partial A = \bar{A} \setminus A = \bar{A} \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)$ et que \bar{A} et le complémentaire de A dans \mathbb{R}^n sont semi-algébriques quand A l'est, ∂A est bien semi-algébrique. De même $\text{int}(A)$ est semi-algébrique.

(ii) On a $f(A) = \pi_m(\Gamma(f))$, où $\pi_m : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $\Gamma(f)$ est le graphe de f . Celui-ci étant par hypothèse semi-algébrique, et les semi-algébriques étant stables par projection, $f(A)$ est bien un semi-algébrique. On a : $f^{-1}(B) = \pi_n((\mathbb{R}^n \times B) \cap \Gamma(f))$, avec $\pi_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Donc si B est semi-algébrique d'après la proposition 2.1.(ii), $f^{-1}(B)$ l'est aussi.

(iii) On a $\Gamma(g \circ f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p; y = \pi_p(\Gamma(g) \cap [\pi_m(\Gamma(f) \cap (\{x\} \times \mathbb{R}^m)) \times \mathbb{R}^p])\}$ et $x \in A$, qui est bien semi-algébrique.

Enfin, $\Gamma(f^{-1})$ est l'image par l'application semi-algébrique $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ de $\Gamma(f)$ définie par $\varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n)$ ce qui d'après le point (ii) assure que f^{-1} est bien semi-algébrique.

(iv) Écrire la continuité ou la différentiabilité totale ou partielle par des formules du premier ordre. Par exemple l'ensemble des points de continuité de f est : $\{a \in U; \forall \epsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x \in U \cap B(a, \eta) : |f(x) - f(a)| \leq \epsilon\}$. Pour monter par exemple que la

fonction $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ est semi-algébrique sur l'ensemble des points A en lesquels elle existe, on peut supposer que $x_1 = x$ est la seule variable de f et on considère le semi-algébrique : $B = \{(a, x, \frac{f(a+x) - f(a)}{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}; a \in A, a+x \in U\}$, avec $\Delta = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2\}$. En notant $\pi(a, x, r) = (a, x)$, on a : $\Gamma(f'(a)) = \bar{B} \cap (A \times \{0\} \times \mathbb{R})$. \square

2.3. Propriétés des fonctions semi-algébriques. Nous énonçons ici deux propriétés fondamentales des fonctions semi-algébriques : la première est la propriété de croissance polynomiale qui a pour conséquence la très importante inégalité de Lojasiewicz. La seconde est le théorème de continuité et monotonie par morceaux.

Théorème 2.5. (i) Soient $b \in \mathbb{R}$ et $f :]b, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^m$ une application semi-algébrique. Il existe $B \in \mathbb{R}$, $B \geq b$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall x \in [B, +\infty[$, $\|f(x)\| \leq x^N$.

On dit que la \mathbf{L}_{ord} -structure \mathbf{R} est polynomialement bornée.

(ii) Soit $g : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application semi-algébrique continue, avec A un semi-algébrique fermé de \mathbb{R}^n . Il existe $\beta > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $\forall x \in A \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(0, \beta))$, $\|g(x)\| \leq \|x\|^N$.

Commençons par une lemme classique.

Lemme 2.6. Soit $P(X) = a_0 X^d + \dots + a_{d-1} X + a_d \in \mathbb{C}[X]$ et $a_0 \neq 0$. Si $y \in \mathbb{C}$, $P(y) = 0$, $|y| \leq \max_{j=1, \dots, d} \left(d \left| \frac{a_j}{a_0} \right| \right)^{1/j}$.

Preuve du Lemme 2.6. Si $|y| > \max_{j=1, \dots, d} \left(d \left| \frac{a_j}{a_0} \right| \right)^{1/j}$, $j = 1, \dots, d$, alors $|a_j| < \frac{1}{d} |a_0 y|^j$ et on a : $|a_1 y^{d-1} + \dots + a_d| < |a_1| |y|^{d-1} + \dots + |a_d| < |a_0 y^d|$, ce qui contredit $P(y) = 0$. \square

Preuve du Théorème 2.5. (i) On peut supposer que $m = 1$, puisque $\| \cdot \| : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ est semi-algébrique. Puisque $\Gamma(f)$ est semi-algébrique par hypothèse, on peut écrire :

$$\Gamma(f) = \bigcup_{i=1}^p \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; P_i(x, y) = 0, Q_{i_1}(x, y) > 0, \dots, Q_{i_{\ell_i}}(x, y) > 0\}.$$

Si un des polynômes P_{i_0} est nul, $\Gamma(f)$ ne peut pas être un graphe, puisqu'alors $\Gamma(f)$ contiendrait un ouvert. Soit maintenant $P(x, y) = \prod_{i=1}^p P_i(x, y) = a_0(x) y^d + \dots + a_{d-1}(x) y + a_d(x)$, le polynôme a_0 étant non nul. Soit $x \in [B, +\infty[$ avec B tel que $B > b$ et a_0 n'a pas de racine sur $[B, +\infty[$. Comme $f(x)$ est une racine de $P(x, X)$ (puisque $(x, f(x)) \in \Gamma(f) \implies P_i(x, f(x)) = 0$, pour au moins un $i \in \{1, \dots, p\}$), par le Lemme 2.6 on en déduit que :

$$|f(x)| \leq \max_{j=1, \dots, d} \left(d \left| \frac{a_j(x)}{a_0(x)} \right| \right)^{1/j} \sim_{x \rightarrow \infty} C |x|^q,$$

avec $q \in \mathbb{Q}$.

(ii) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(r) = \sup_{x \in B(0,r) \cap A} \|g(x)\|$ (noter que $B(0,r) \cap A$ est un compact sur lequel g est continue). D'après (i) il existe $N \in \mathbb{N}, \beta > 0$ tels que pour tout $x \in A$, $\|x\| > \beta$, $\|g(x)\| \leq f(\|x\|) \leq \|x\|^N$. \square

Exemple. Le graphe de $\exp : [b, +\in[\rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas semi-algébrique.

Théorème 2.7 (Inégalité de Lojasiewicz). Soit K un compact semi-algébrique et $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions semi-algébriques continues telle que :

$$f^{-1}(0) \subset g^{-1}(0).$$

Il existe alors $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall x \in K, |g(x)|^N \leq C|f(x)|.$$

Preuve. Soit $t > 0$ et soit le compact $G_t = \{x \in K, |g(x)| = 1/t\}$. Puisque f ne s'annule pas sur G_t , on définit $\theta(t) = \max\{1/|f(x)|, x \in G_t\}$ si $G_t \neq \emptyset$, $\theta(t) = 0$ sinon. La fonction θ est semi-algébrique. Par le Théorème 2.5, il existe $B > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $t > B \implies \theta(t) \leq t^N$, soit :

$$|g(x)| < 1/B \implies 1/|f(x)| \leq \theta(1/|g(x)|) \leq 1/|g(x)|^N,$$

$$0 < |g(x)| < 1/B \implies |g(x)|^N \leq |f(x)|.$$

D'autre part si $D = \max\{|g(x)|^N/|f(x)|, x \in K \cap |g|^{-1}([1/B, +\in[)\}$, en posant $C = \max(1, D)$, on a l'égalité annoncée. \square

Remarque. L'hypothèse f et g sont définies sur le compact K , (ou au moins l'hypothèse $|g|^N/|f|$ est bornée sur $|g|^{-1}([1/B, +\in[)$) dans l'énoncé du Théorème 2.7 est essentielle. Par exemple, si $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction constante égale à 1 et $f(x) = 1/x$, on ne peut bien sûr espérer qu'existent $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, |g(x)|^N \leq C|f(x)|$, tandis que l'existence de telles quantités C et N est garantie sur tout compact de \mathbb{R}_+ .

Corollaire 2.8. Soit K un semi-algébrique compact de \mathbb{R}^n , $A \subset K$ un semi-algébrique de \mathbb{R}^n et $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction semi-algébrique telle que $x \in A \implies f(x) = 0$. Il existe alors $C > 0$ et N tels que $|f(x)|^N \leq Cd(x, A)$.

Preuve. Conséquence directe du Théorème 2.7. \square

Théorème 2.9 (Théorème de monotonie). Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction semi-algébrique sur un intervalle $]a, b[$ non nécessairement borné. Il existe une subdivision finie de $]a, b[$, $a = a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ telle que sur $]a_i, a_{i+1}[$, $i = 1, \dots, n-1$, la fonction f est soit constante, soit strictement monotone et continue.

Preuve. Nous suivons la preuve de [Dri]. Ici le terme intervalle exclut les singletons. Elle repose sur les trois lemmes suivants. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction semi-algébrique :

(1) *Il existe un sous-intervalle de I sur lequel f est constante ou injective.*

(2) *Si f est injective, il existe un sous-intervalle de I sur lequel f est strictement monotone.*

(3) *Si f est strictement monotone, il existe un sous-intervalle de I sur lequel f est continue.*

• Ces trois lemmes donnent facilement le théorème comme on le montre maintenant. Soit A le semi-algébrique :

$$A = \{x \in]a, b[; f \text{ est constante ou strictement monotone et continue, au voisinage de } x\}.$$

Le complémentaire de A dans $]a, b[$ étant un semi-algébrique, il est réunion finie de points et d'intervalles. Or si $]a, b[\setminus A$ contient un intervalle I , en appliquant successivement (1),

(2) et (3) à I , on arrive à une contradiction. Si $]a, b[\setminus A$ est fini, on a : $A = \bigcup_{j=1}^{\ell} I_j$, avec

I_j un intervalle, et $]a, b[= A \bigcup_{i=1}^m \{\beta_i\}$, il suffit alors de démontrer le théorème pour $f|_{I_j}$,

c'est-à-dire que l'on peut supposer que f est continue sur l'intervalle $]a, b[$, et que si x est un point de I_j , au voisinage de x , f est soit constante, soit strictement monotone. Mais les ensembles de points de I_j au voisinage desquels f est constante ou strictement croissante ou strictement décroissante étant ouverts dans I_j (par définition de ceux-ci) et ceux-ci constituant une partition de I_j , la connexité de I_j montre que I_j est l'un de ces trois ensembles.

• Nous sommes par conséquent maintenant amenés à prouver les points (1), (2) et (3).

Preuve de (1) : Si pour un $y \in \mathbb{R}$ le semi-algébrique $f^{-1}(y)$ est infini, il contient un intervalle sur lequel f est constante et vaut y . Supposons donc que toutes les fibres de f sont finies. Dans ce cas $f(I)$ est infini, puisque I est infini, et $f(I)$ étant semi-algébrique, il contient un intervalle J . La fonction $g : J \rightarrow I$ définie par $g(y) = \min\{x; f(x) = y\}$ est semi-algébrique et injective par construction, donc $g(J)$ est comme J infini et étant semi-algébrique contient un intervalle K . Enfin, sur l'intervalle K la fonction f est injective, puisque $g(J)$ ne contient qu'un représentant de chaque fibre $f^{-1}(y)$, $y \in J$.

Preuve de (3) : Supposons que f est strictement croissante sur I . Alors $f(I)$ est un semi-algébrique infini. Il contient un intervalle J . Soient $c < d$ dans J . Alors $f^{-1}(c) = \{\alpha\}$, $f^{-1}(d) = \{\beta\}$ et $\alpha < \beta$. La fonction f est bijective de $[\alpha, \beta]$ sur $[c, d]$ et l'image réciproque par f de tout intervalle de $[c, d]$ étant un intervalle de même nature, f est continue sur $[\alpha, \beta]$.

Preuve de (2) : Supposons que f est injective sur l'intervalle I et montrons qu'alors f est strictement monotone sur un sous-intervalle de I . Soit $x \in I$. Comme f

est injective, on a la partition semi-algébrique:

$$]a, x[= \{y \in]a, x[; f(y) < f(x)\} \sqcup \{y \in]a, x[; f(y) > f(x)\}.$$

Il existe ainsi un intervalle $]a, x[$ contenu dans l'un des deux ensembles de cette partition. En procédant de même pour $]x, b[$, on en déduit que pour tout $x \in I$, on a l'une des quatre possibilités :

- $P_{++} : \exists \alpha, \beta \in I, \alpha < x < \beta$, et $\forall y \in]\alpha, x[: f(y) > f(x)$,
 $\forall y \in]x, \beta[: f(y) > f(x)$
- $P_{--} : \exists \alpha, \beta \in I, \alpha < x < \beta$, et $\forall y \in]\alpha, x[: f(y) < f(x)$,
 $\forall y \in]x, \beta[: f(y) < f(x)$
- $P_{+-} : \exists \alpha, \beta \in I, \alpha < x < \beta$, et $\forall y \in]\alpha, x[: f(y) > f(x)$,
 $\forall y \in]x, \beta[: f(y) < f(x)$
- $P_{-+} : \exists \alpha, \beta \in I, \alpha < x < \beta$, et $\forall y \in]\alpha, x[: f(y) < f(x)$,
 $\forall y \in]x, \beta[: f(y) > f(x)$.

Les ensembles des points de I satisfaisant tous P_{++} ou P_{--} ou P_{+-} ou P_{-+} étant semi-algébriques, un de ces quatre ensembles contient un intervalle $]c, d[$ et quitte à remplacer I par $]c, d[$, on suppose que les points de I lui-même satisfont tous une seule des quatre possibilités ci-dessus.

- Dans le cas où tous les points de I satisfont P_{-+} , soient $x, x' \in I, x < x'$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que le compact $[x, x']$ est recouvert par des intervalles $]\alpha_i, \beta_i[$, $i = 1, \dots, k$, pour lesquels : $\alpha, \beta \in]\alpha_i, \beta_i[\Rightarrow f(\alpha) < f(\beta)$. En choisissant une chaîne $x_1 = x, x_2, \dots, x_{k'} = x'$ telle que x_j, x_{j+1} sont dans le même intervalle $]\alpha_i, \beta_i[$, on en déduit que : $f(x) < f(x_2) < \dots < f(x')$. Donc f est strictement croissante sur I .

- De même on montre que f est strictement décroissante sur I lorsque tous les points de I satisfont P_{+-} .

- Supposons que tous les points de I satisfont P_{++} . Soit B le semi-algébrique suivant :

$$B = \{x \in I; \forall y \in I, y > x \Rightarrow f(y) > f(x)\}.$$

Si B est infini, B contient un intervalle sur lequel f est strictement croissante. Supposons alors que B est fini et soit un intervalle dans $]\max(B), b[$, que l'on appelle encore I . On a :

$$\forall x \in I \exists y \in I, y > x \ \& \ f(y) < f(x). \quad (*)$$

Soit $x \in I$. Il existe alors $\beta \in I$ tel que pour tout $y \in]\beta, b[$, $f(y) < f(x)$. Sinon par semi-algéblicité de cette condition il existerait un intervalle $]\beta, b[$ tel que pour tout $y \in]\beta, b[$, $f(y) > f(x)$. Soit alors $\alpha = \inf\{\beta \in [x, b[; \forall y \in]\beta, b[\ f(y) > f(x)\}$. Par (*), $\alpha \neq x$, de sorte que par injectivité de f sur I , $f(\alpha) \neq f(x)$. Mais parce que α vérifie P_{++} , on ne peut avoir $f(\alpha) > f(x)$, puisqu'alors au voisinage de α on aurait des points y

tels que $f(y) > f(\alpha) > f(x)$, ce qui contredirait la minimalité de α . On suppose donc $f(\alpha) < f(x)$. Or d'après (*) il existe y_α , $\alpha < y_\alpha$ tel que $f(y_\alpha) < f(\alpha) < f(x)$. Ceci contredit la définition de α qui implique : $\forall y \in]\alpha, b[, f(y) > f(x)$. En conclusion comme on l'a annoncé : il existe $\beta \in I$ tel que pour tout $y \in]\beta, b[, f(y) < f(x)$.

Soit alors :

$$\alpha_x = \inf\{\beta \in [x, b[; \forall y \in]\beta, b[f(y) < f(x)\}.$$

Comme x et α_x resp. vérifient P_{++} , on ne peut avoir $\alpha_x = x$ ou $f(\alpha_x) \geq f(x)$ resp. On a donc $x < \alpha_x$ et $f(\alpha_x) < f(x)$. Notons que par minimalité de α_x , $\forall y \in]\alpha_x, b[,$ on a : $f(y) < f(x)$. De plus on a nécessairement pour tout y dans un certain intervalle $] \alpha', \alpha_x[: f(y) > f(x)$, car sinon par semi-algébricité, on aurait $f(y) < f(x)$ pour tout y dans un intervalle $] \alpha'', \alpha_x[$, et donc pour tout y dans $] \alpha'', b[$ on aurait $f(y) < f(x)$, ce qui contredirait encore la minimalité de α_x .

On a donc prouvé que quel que soit $x \in I$ existe $\alpha_x > x$ dans I vérifiant (cf Fig. 3) :

$$\exists \alpha' \in I, \alpha' < \alpha_x, \forall y \in]\alpha', \alpha_x[, \forall z \in]\alpha_x, b[, f(y) > f(z).$$

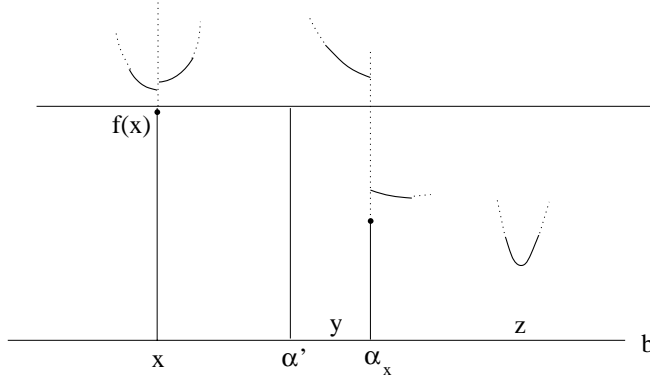


Fig.3

Par semi-algébricité de cette condition, il existe un intervalle, que l'on suppose encore être I , sur lequel tous les points w vérifient :

$$Q_{+-}(w) : \quad \exists w' \in I, w' < w, \forall y \in]w', w[, \forall z \in]w, b[, f(y) > f(z).$$

- On remarque que vérifier la condition P_{++} est stable par la transformation $f \rightarrow f \circ \iota$, où $\iota(x) = -x$, alors que vérifier Q_{+-} ne l'est pas. C'est-à-dire que l'on peut prouver, exactement par les mêmes arguments, mais en partant au lieu de B de :

$$\tilde{B} = \{x \in I; \forall y \in I, y < x \Rightarrow f(y) > f(x)\},$$

que l'on a sur I la condition $(*)$:

$$\forall x \in I \exists y \in I, y < x \ \& \ f(y) < f(x). \quad (\tilde{*})$$

Ce qui conduit, pour tout $x \in I$ à l'existence de $\beta \in I$ tel que $\forall y \in]a, \beta[\ f(y) < f(x)$.
En posant :

$$\tilde{\alpha}_x = \sup\{\beta \in]a, x]; \forall y \in]a, \beta[\ f(y) < f(x)\},$$

on obtient l'existence de $\tilde{\alpha}' \in I$ tel que :

$$\tilde{\alpha}' > \tilde{\alpha}_x, \forall y \in]a, \alpha_x[, \forall z \in]\tilde{\alpha}'_x, \tilde{\alpha}'[, \ f(y) < f(z).$$

En conclusion on montre que tous les points w de I vérifient la condition :

$$\tilde{Q}_{-+}(w) : \quad \exists w' \in I, w' > w, \forall y \in]a, w[\forall z \in]w, w'[, \ f(y) < f(z).$$

Or les deux conditions $Q_{+-}(w)$ et $\tilde{Q}_{-+}(w)$ ne peuvent avoir lieu en même temps pour aucun point de I . Ceci montre que l'hypothèse : “(tous les points de I satisfont P_{++}) et (B est fini ou \tilde{B} est fini)” est absurde.

- De même la condition “tous les points de I satisfont P_{--} et (C est fini ou \tilde{C} est fini)” (avec C défini comme B) ne peut être réalisée.

Ceci achève la preuve du point (2) et par là la preuve du théorème de monotonie. \square



Remarque. La preuve du théorème de monotonie n'utilise pas de manière essentielle la définition des ensembles semi-algébriques. Cette preuve utilise plutôt les propriétés remarquables des semi-algébriques conséquences de leur définition. En réalité cette preuve est encore valable dans les *structures o-minimales sur les réels*, dont la définition est donnée maintenant. On constate que les ensembles semi-algébriques constituent une structures o-minimale particulière.

Définition (structures o-minimales). Une *structure o-minimale* \mathcal{S} sur les réels est la donnée d'une suite $(\mathcal{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\mathcal{S}_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant :

- (1) $\emptyset \in \mathcal{S}_n, \mathcal{S}_n$ est stable par les combinaisons booléennes finies.
- (2) $A \in \mathcal{S}_n \Rightarrow A \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \times A \in \mathcal{S}_{n+1}$.
- (3) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_i = x_j\} \in \mathcal{S}_n, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$.
- (4) $A \in \mathcal{S}_{n+1} \Rightarrow \pi(A) \in \mathcal{S}_n$, où $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est la projection standard sur les n premières composantes.
- (5) $\{a\} \in \mathcal{S}_1, \forall a \in \mathbb{R}$ et $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < y\} \in \mathcal{S}_2$
- (6) les éléments de \mathcal{S}_1 sont des réunions finies d'intervalles et de points.

La preuve que nous donnons au chapitre 3 du théorème de décomposition cellulaire sera également vraie dans n'importe quelle structure o-minimale sur les réels, alors que dans [Cos1] on trouve une démonstration de ce théorème spécifique aux ensembles semi-algébriques.

2.4. Valeurs critiques des fonctions semi-algébriques, trajectoires du champ gradient d'un polynôme. On s'intéresse ici tout particulièrement aux valeurs singulières d'une fonction semi-algébrique et au comportement des trajectoires de champs de vecteurs donnés par le gradient d'un polynôme, au voisinage d'un point singulier de ce champ. Nous définissons tout d'abord toutes ces notions.

Définitions. Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application différentiable. Si $x \in U$ est tel que $Df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ n'est pas surjective (resp. est nulle) on dit que x est un *point critique de f* (resp. un *point singulier de f*) et que $f(x)$ est une *valeur critique de f* (resp. une *valeur singulière de f*). On note Σ_f l'ensemble des points critiques de f et Δ_f l'ensemble des valeurs critiques de f .

Rappel (Théorème de Sard). Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est \mathcal{C}^{n-m+1} , Δ_f est de mesure de Lebesgue nulle dans \mathbb{R}^m . En particulier, par le théorème des fonctions implicites, pour tout t dans l'ensemble $\mathbb{R}^m \setminus \Delta_f$ (qui est de complémentaire négligeable dans \mathbb{R}^m) $f^{-1}(t)$ est une sous-variété différentiable de \mathbb{R}^n , de dimension $n-m$, ou vide (si $t \notin f(U)$).

Théorème 2.10. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction semi-algébrique.

(i) Σ_f et Δ_f sont des ensembles semi-algébriques.

(ii) Si f est \mathcal{C}^n , et si on suppose que $f(a)$ est une valeur critique de f , il existe $r > 0$ tel que :

$$\Sigma_f \cap B(a, r) \subset f^{-1}(a).$$

(iii) (Inégalité de Lojasiewicz pour le gradient) Sous les hypothèses de (ii), il existe $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall x \in B(a, r), |f(x) - f(a)|^N \leq C |\nabla f(x)|,$$

avec $\nabla f(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))$, le gradient de f en x .

Preuve. (i) Comme Df est semi-algébrique par le Corollaire 2.4 (iv), il est facile de voir que Σ_f est semi-algébrique, et donc que finalement Δ_f est un semi-algébrique de \mathbb{R} .

(ii) Par le théorème de Sard, Δ_f est un semi-algébrique de mesure nulle dans \mathbb{R} . Or les semi-algébriques de \mathbb{R} sont les réunions finies d'intervalles et de points, donc l'ensemble des valeurs critiques (singulières ici) est par conséquent de cardinal fini. La valeur critique $f(a)$ est isolée dans Δ_f . Soit $R > 0$ de sorte que $]a - R, a + R[\cap \Delta_f = \{a\}$.

Alors si V est le voisinage ouvert $f^{-1}(]a - R, a + R[)$ de $f^{-1}(a)$, il ne contient alors que des ponts critiques contenus dans $f^{-1}(a)$.

(iii) D'après le point (ii), r est tel que lorsque $x \in B(a, r)$ et $\nabla f(x) = 0$, on a : $f(x) - f(a) = 0$. D'après l'inégalité de Lojasiewicz, il existe bien $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall x \in B(a, r), |f(x) - f(a)|^N \leq C|\nabla f(x)|$, pour tout $x \in B(a, r)$. \square

Remarque. L'hypothèse f est \mathcal{C}^n n'est en réalité pas nécessaire dans l'énoncé du Théorème 2.10.

Exemples. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = y^2 - x^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Dans les deux cas 0 est une valeur critique et les voisinages des points critiques $(0, 0)$ (pour f) et $(0, 0, 0)$ (pour g) privés des fibres singulières $f^{-1}(0)$ et $g^{-1}(0)$ est constitué des fibres "lisses" $f^{-1}(t)$ et $g^{-1}(t)$, $t \neq 0$, ie de sous-variétés différentiables de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 respectivement.

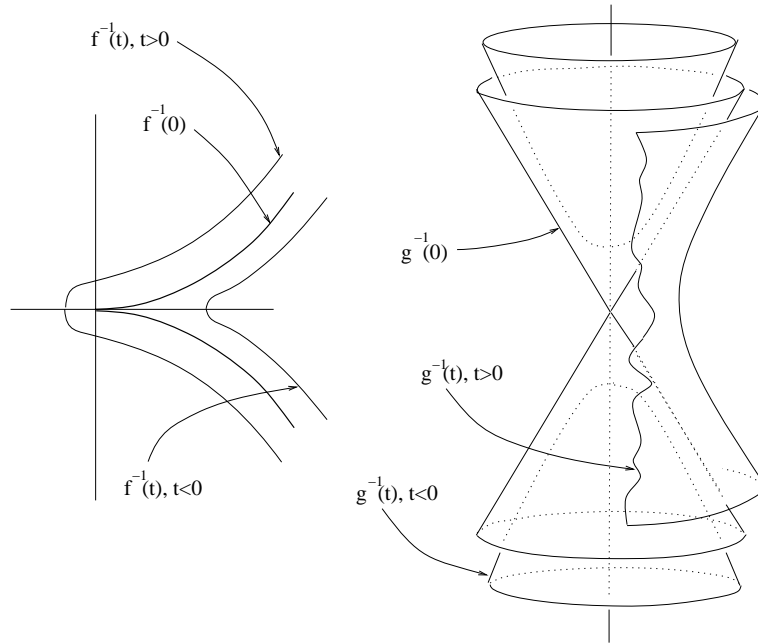


Fig. 4

Définition. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , et $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application (au moins continue). On dit que v est un *champ de vecteurs* sur U . Si $a \in U$ et $v(a) = 0$, on dit que a est une *singularité du champ* v . Lorsque $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une application \mathcal{C}^1 , $U \ni x \mapsto \nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$ définit un champ de vecteurs sur U . On dit qu'il s'agit du champ gradient de f .

Remarque. Si f est \mathcal{C}^k , $k \geq 1$ et si $\nabla f(x) \neq 0$ (ce qui équivaut à dire que x n'est

pas un point critique de f) localement au voisinage de x , $f^{-1}(f(x))$ est le graphe d'une application \mathcal{C}^k et donc est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension $n - 1$ et de classe k . On dit que localement en x , $f^{-1}(f(x))$ est une hypersurface de \mathbb{R}^n . On remarque alors que : $\nabla f(x) \perp T_x f^{-1}(f(x))$, où $T_x f^{-1}(f(x))$ est l'espace tangent à $f^{-1}(f(x))$ en x .

On considère maintenant un champ de vecteurs v défini sur un ouvert U de \mathbb{R}^n et l'équation différentielle ordinaire :

$$\gamma'(t) = v(\gamma(t)) \quad (\mathcal{E})$$

C'est-à-dire que l'on cherche les courbes dérivables $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dont la dérivée en t est donnée par le champ de vecteur v au point $\gamma(t)$ en lequel passe la courbe γ en t . Une telle courbe s'appelle *une trajectoire de v* . Par un point donné de U passe et une seule trajectoire de v . En écrivant le champ $v(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, avec $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}$, on peut espérer que la régularité géométrique des f_j procure de la régularité géométrique aux solutions γ .



Remarque. Ce type de problème est en général très délicat. Par exemple lorsque les f_j sont semi-algébriques ou même polynomiales, en général il n'en est pas de même des trajectoires du champ. On peut en particulier obtenir des trajectoires spirales comme le montre l'exemple facile suivant.

Exemple. Considérons le champ de vecteurs de \mathbb{R}^2 qui possède des composantes polynomiales et une singularité isolée en $(0, 0)$:

$$v(x, y) = \left((x^2 + y^2 - 1)x - y, (x^2 + y^2 - 1)y + x \right),$$

Notons alors : $r^2 = x^2 + y^2$, $\vec{\tau} = (x, y)/r$ et $\vec{n} = (-y, x)/r$. On a :

$$v(x, y) = r(r^2 - 1) \cdot \vec{\tau} + r \cdot \vec{n}.$$

Une trajectoire passant par un point $p \in \mathbb{R}^2$ avec $r(p) = 1$ parcourt le cercle unité (par unicité des solutions passant par un point donné). Maintenant soit $\gamma = (\alpha, \beta)$ une trajectoire de v passant par un point q tel que $r(q) < 1$. Cette trajectoire ne peut sortir du disque unité, sinon elle couperait le cercle unité qui est une autre trajectoire du champ. On a : $\frac{d[r^2 \circ \gamma]}{dt} = 2(\alpha\alpha' + \beta\beta')$, ce qui donne : $\frac{d[r^2 \circ \gamma]}{dt} = 2(r^2 - 1)(\alpha^2 + \beta^2) < 0$. Ceci prouve (compléter l'argument en exercice) que la trajectoire γ a le point singulier $(0, 0)$ du champ comme limite.

De plus si l'on note $e : \text{int}(B(0, 1)) \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow S^1(0, 1)$ définie par $e(x) = x/\|x\|$, l'image $\Gamma = e(\gamma)$ de γ par e est une courbe dont la vitesse en t est : $\frac{1}{r} \cdot r \cdot \vec{n} = \vec{n}$. C'est-à-dire que la courbe Γ , qui est définie sur un intervalle non borné comme la courbe γ (par non prolongement des solutions maximales), parcourt le cercle sur un intervalle de temps infini à vitesse constante, soit une infinité de fois. En conclusion γ spirale

autour de l'origine et n'est donc pas une courbe semi-algébrique (cf la remarque qui suit la preuve de la Proposition 2.1).

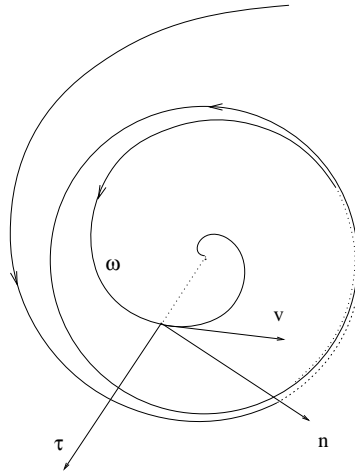


Fig. 5

Le cercle unité de l'exemple ci-dessus est appelé un *cycle limite du champ*. Il s'agit d'une trajectoire fermée du champ (ie que la trajectoire est cyclique ou qu'en deux instants distincts, la trajectoire passe par le même point), non réduite à un point (ie qui n'est pas un point singulier du champ) et pour laquelle existe un voisinage ne contenant pas uniquement des cycles. La question de savoir si un champ de vecteurs polynomial v ($v(x, y) = (P_1(x), \dots, P_n(x))$, avec $P_i(x) \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$) possède des trajectoires régulières en un certain sens est une question qui débouche sur de nombreuses conjectures encore indéçises. Par exemple savoir si un champ de vecteurs polynomial v du plan possède un nombre fini de cycles limites et si ce nombre dépend des degrés de P_1 et P_2 est l'objet du 16ème problème de Hilbert, incomplètement résolu en 1923 par H. Dulac (la démonstration comportait une erreur) et finalement résolu en 1992 par Y. Ilyashenko et J. Écalle sous la forme : "le nombre de cycles limites d'un champ de vecteur polynomial du plan est borné". En revanche on ne sait toujours pas si ce nombre ne dépend que du degré des polynômes qui définissent le champ.

Nous allons montrer ici un résultat de régularité pour les trajectoires d'un champ polynomial dont les composantes ont la contrainte supplémentaire d'être celles du gradient d'un polynôme. Lorsque le champ v est le gradient d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ et possède en a (que l'on suppose être l'origine pour simplifier) une singularité isolée, les trajectoires qui ont a pour limite possèdent la propriété d'avoir

une longueur finie au voisinage de a (attention ceci ne signifie pas qu'une telle trajectoire ne spirale pas et encore moins qu'elle est semi-algébrique).

Soit donc U un ouvert de \mathbb{R}^n contenant l'origine, $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application \mathcal{C}^1 et $V : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application définie par $V(t, y) = v(y)$. On considère l'équation différentielle (dite autonome ou encore le champ de vecteurs sur U) :

$$\gamma'(t) = V(t, y(t)) = v(y(t)) \tag{\mathcal{E}}$$

- Le problème de Cauchy pour (\mathcal{E}) admet une solution unique en chaque point (t_0, y_0) de $\mathbb{R} \times U$.

En effet, l'application V étant \mathcal{C}^1 , par le théorème de la moyenne, V est localement lipschitzienne en sa seconde variable, et d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, quel que soit $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times U$, il existe un intervalle ouvert I_0 contenant t_0 et une I_0 -solution de (\mathcal{E}) , $\mu : I_0 \rightarrow \Omega$ telle que $\mu(t_0) = y_0$. De plus il n'existe qu'une seule J -solution de (\mathcal{E}) passant par y_0 en t_0 , pour $J \subset I_0$; c'est la restriction de μ à J . La solution μ se prolonge en une solution maximale $\gamma : I \rightarrow \Omega$. Par unicité locale de la solution de (\mathcal{E}) en chaque point $(t, y(t)) \in I \times \Omega$, γ est la seule I -solution de (\mathcal{E}) passant par y_0 en t_0 . Enfin les trajectoires des solutions maximales de (\mathcal{E}) donnent une partition de U .

- On suppose que $\gamma :]a, b[\rightarrow \Omega$ est une solution maximale de (\mathcal{E}) ayant 0 pour valeur d'adhérence en la borne a de I . alors, nécessairement $a = -\infty$.

En effet, par le théorème de prolongement des solutions, si 0 est valeur d'adhérence en a de γ , nécessairement puisque 0 n'est pas dans la frontière du domaine $\mathbb{R} \times U$, a est une valeur infinie. Comme a est à gauche du domaine I , $a = -\infty$.

- On suppose que v est \mathcal{C}^1 sur un ouvert borné \mathcal{O} contenant l'adhérence de l'ouvert U et que v ne s'annule éventuellement sur \mathcal{O} qu'en 0. Alors, si 0 est une valeur d'adhérence d'une trajectoire maximale de (\mathcal{E}) en une des bornes de son intervalle de définition nécessairement $v(0) = 0$.

En effet, si γ est une solution maximale de (\mathcal{E}) ayant 0 pour valeur d'adhérence en la borne gauche de son intervalle, on vient de voir que cette borne est alors $-\infty$. Supposons que $v(0) \neq 0$. Alors d'après les hypothèses v ne s'annule pas sur le compact \bar{U} . Il existe alors une composante de v , disons v_1 pour fixer les idées, qui ne s'annule pas sur \bar{U} , et donc il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in U$, $v_1(y) \geq \delta > 0$ (on peut supposer que v_1 est par exemple positive, puisqu'elle ne s'annule pas). Soit alors $t_0 \in I$ et $\alpha \in I, \alpha < t_0$. On a $\gamma_1(t_0) - \gamma_1(\alpha) = \int_{\alpha}^{t_0} \gamma'_1(u) du = \int_{\alpha}^{t_0} v_1(\gamma(u)) du \geq \delta(t_0 - \alpha)$. Or $\gamma_1(t_0) - \gamma_1(\alpha) \rightarrow \gamma_1(t_0)$ quand $\alpha \rightarrow -\infty$ et $\delta(t_0 - \alpha) \rightarrow \infty$ quand $\alpha \rightarrow -\infty$. L'hypothèse $v(0) \neq 0$ est donc absurde.

- Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. On pose $v(x_1, \dots, x_n) = \nabla P(X)$. On suppose que $P(0) = 0, \nabla P(0) = 0$ et que dans un voisinage U de 0, le seul point singulier de v soit 0. D'après l'inégalité de Lojasiewicz appliquée au gradient, il existe $r > 0, C > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $B(0, r) \subset U$ et :

$$\forall x \in B(0, r), |P(x)|^N \leq C \|\nabla P(x)\|. \tag{*}$$

On montre qu'en réalité dans le cas du gradient, on peut prendre pour N un rationnel < 1 (penser au cas simple des polynômes d'une variables).

Soit $\gamma :]-\infty, b[\rightarrow U$ une solution maximale de (\mathcal{E}) telle que 0 soit une valeur d'adhérence de γ en $-\infty$. Alors :

Théorème 2.11 ([Lo]). *Une trajectoire γ d'un champ de vecteurs gradient d'un polynôme v , à singularité isolée en a , ayant a pour valeur d'adhérence (en $-\infty$ par exemple) ne possède que a pour valeur d'adhérence.*

Preuve. On suppose $a = 0$ et $P(0) = 0$, comme précédemment. Si γ possède 0 et A comme valeurs d'adhérence en $-\infty$ et si $A \neq 0$, il existe $\alpha_1 > \beta_1 > \alpha_2 > \beta_2 > \dots$ deux suites tendant vers $-\infty$ telles que $\|\gamma(\alpha_n) - \gamma(\beta_n)\| > \|A\|/2$. Comme la longueur de la trajectoire de γ entre α_1 et $-\infty$ est plus grande que celle de la trajectoire de γ entre α_1 et α_n , qui est $\geq n \cdot \|\omega\|/2$, cette longueur est infinie. Nous montrons que la longueur de γ est finie sur $] - \infty, b]$.

Remarquons que:

$$\left(v(\gamma(t)) | v(\gamma(t)) \right) = \left(v(\gamma(t)) | \gamma'(t) \right) = DP_{(\gamma(t))}(\gamma'(t)) = (P \circ \gamma)'(t).$$

On en déduit que la longueur $\ell(\gamma)$ de γ entre t_0 et α , $\alpha > t_0$, est :

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \int_{\alpha}^{t_0} \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\alpha}^{t_0} \|v(\gamma(t))\| dt = \int_{\alpha}^{t_0} \|v(\gamma(t))\|^2 / \|v(\gamma(t))\| dt \\ &= \int_{\alpha}^{t_0} \left(v(\gamma(t)) | v(\gamma(t)) \right) / \|v(\gamma(t))\| dt = \int_{\alpha}^{t_0} (P \circ \gamma)'(t) / \|v(\gamma(t))\| dt \\ &\leq C \int_{\alpha}^{t_0} (P \circ \gamma)'(t) / |P(\gamma(t))|^N dt. \end{aligned}$$

D'autre part puisque $(P \circ \gamma)'(t) = \left(v(\gamma(t)) | v(\gamma(t)) \right) \geq 0$, $t \mapsto (P \circ \gamma)(t)$ est croissante, et comme $P(\gamma(t)) \rightarrow P(0) = 0$ quand $t \rightarrow -\infty$, on a $P(\gamma(t)) \geq 0$. On en déduit que :

$$\ell(y) \leq \frac{C}{1-N} \int_{\alpha}^{t_0} ((P \circ \gamma)^{1-N})'(t) dt = \frac{C}{1-N} (P^{1-N}(\gamma(t_0)) - P^{1-N}(\gamma(\alpha))),$$

cette quantité étant bornée lorsque $\alpha \rightarrow -\infty$, puisque $N < 1$, il en est de même de $\ell(y)$. On en conclut que 0 est la seule valeur d'adhérence de γ . \square

Pour les trajectoires des champs gradient d'un polynôme arrivant sur une singularité isolée a du champ, R. Thom avait conjecturé l'existence de la limite des droites sécantes $(a\gamma(t))$, lorsque $\gamma(t) \rightarrow a$. Cette conjecture a été prouvée par K. Kurdyka, T. Mostowski et A. Parusiński dans [Kur-Mos-Par].

La question de la limite des tangentes à une trajectoire d'un champ gradient de polynôme arrivant sur un point singulier est ouverte.

Chapitre 3. Décompositions cellulaires



Nous montrons dans ce chapitre trois théorèmes essentiels. Le premier est le théorème de décomposition cellulaire des ensembles semi-algébriques, le deuxième affirme que l'on peut décomposer le domaine de définition d'une application semi-algébrique en semi-algébriques sur lesquels l'application est continue, et le troisième est la propriété de finitude uniforme des fibres. Ces trois résultats se démontrent par récurrence simultanément. Le premier a pour conséquence que les composantes connexes d'un semi-algébrique sont semi-algébriques. Le troisième possède une version quantifiée que nous démontrerons plus loin, qui donne une borne du nombre de composantes connexes dans les fibres d'une application semi-algébrique, ou ce qui revient au même une borne du nombre de composantes connexes d'un semi-algébrique en fonction des données combinatoires de départ qui sont le nombre de réunions et d'intersections, d'égalités et d'inégalités polynomiales ainsi que le degré et l'arité des polynômes qui définissent l'ensemble semi-algébrique en question.

Nous suivons la preuve de [Dri]. Dans [Cos1] on trouve une preuve plus courte et plus directe du théorème de décomposition cellulaire qui exploite au mieux le fait que les semi-algébriques sont définis par des égalités et des inégalités. La preuve de [Dri] présente l'avantage, comme c'était déjà le cas pour le théorème de monotonie d'être valable pour une structure o-minimale quelconque, ie une catégorie d'ensembles stables par opérations booléennes, produits, projections, contenant les hyperplans et les demi-espaces et dont les sous-ensembles de \mathbb{R} sont les réunions finies d'intervalles (cf la définition du chapitre 2).

3.1. Cellules et décompositions cellulaires définissables \mathcal{C}^0 . Nous définissons dans cette section la notion de cellule. Toutes les définitions et les preuves de cette section sont valables dans une structure o-minimale sur les réels, aussi semi-algébrique vaut pour définissable dans une telle structure dans ce qui suit.

Notations. Soit A un ensemble semi-algébrique, on note $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble des fonctions semi-algébriques continues sur A . Si f et g sont dans $\mathcal{C}(A)$ et vérifient $\forall x \in A, f(x) < g(x)$, on note par $]f, g[$ le semi-algébrique suivant :

$$]f, g[= \{(x, y) \in A \times \mathbb{R}; f(x) < y < g(x)\}.$$

Définition (Cellule semi-algébrique \mathcal{C}^0). Soient $m \in \mathbb{N}$ et (i_1, \dots, i_m) une suite finie de m entiers parmi $\{0, 1\}$. Une (i_1, \dots, i_m) -cellule \mathcal{C}^0 de \mathbb{R}^m ou plus simplement une (i_1, \dots, i_m) -cellule de \mathbb{R}^m est un sous-ensemble semi-algébrique de \mathbb{R}^m défini par récurrence sur m de la façon suivante :

- Par convention, lorsque $m = 0$, une $()$ -cellule est l'espace \mathbb{R}^0 .

- Une (0)-cellule de \mathbb{R} est un point de \mathbb{R} , une (1)-cellule de \mathbb{R} est un intervalle ouvert de \mathbb{R} (non nécessairement borné).

- Les (i_1, \dots, i_m) -cellules de \mathbb{R}^m étant supposées définies, une $(i_1, \dots, i_m, 0)$ -cellule de $\mathbb{R}^{m+1} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ est le graphe $\Gamma(f)$ d'une application $f \in \mathcal{C}(C)$, où C est une (i_1, \dots, i_m) -cellule de \mathbb{R}^m . Une $(i_1, \dots, i_m, 1)$ -cellule de \mathbb{R}^{m+1} est un ensemble $]f, g[$, où $f, g \in \mathcal{C}(C) \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $f < g$ sur C , avec C est une (i_1, \dots, i_m) -cellule de \mathbb{R}^m .

La (0) -cellule de \mathbb{R}^0 et une $(1, \dots, 1)$ -cellule \mathbb{R}^m sont appelées *cellules ouvertes* de \mathbb{R}^m . Une (i_1, \dots, i_m) -cellule de \mathbb{R}^m est simplement appelée une *cellule* de \mathbb{R}^m . Étant donnée une cellule C de \mathbb{R}^m , il n'existe qu'un seul entier m et qu'une seule suite $(i_1, \dots, i_m) \in \{0, 1\}^m$ telle que C soit une (i_1, \dots, i_m) -cellule de \mathbb{R}^m (l'ordre des composantes des éléments de \mathbb{R}^m importe).

Remarque. Un cellule est toujours semi-algébriquement homéomorphe à une cellule ouverte. En effet si C est une $(0, \dots, 0)$ -cellule, C est semi-algébriquement homéomorphe à la (0) -cellule ouverte \mathbb{R}^0 . Si C est une (i_1, \dots, i_m) -cellule et si $(i_{j_1}, \dots, i_{j_k})$ est la sous-suite extraite des 1 de (i_1, \dots, i_m) , $k \in \{1, \dots, m\}$, C est homoméomorphe à une $(i_{j_1}, \dots, i_{j_k})$ -cellule de \mathbb{R}^k par les projections des graphes associés aux zéros de la suite (i_1, \dots, i_m) .

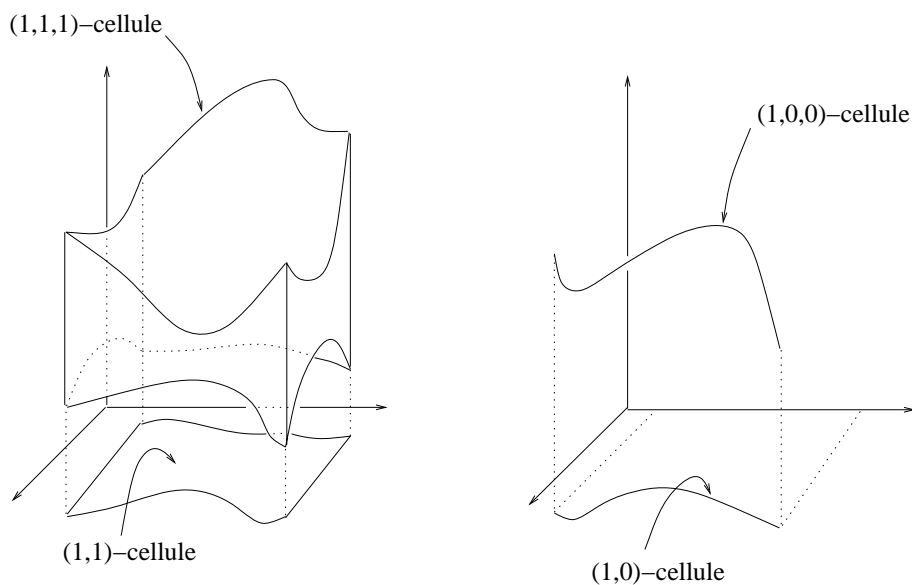


Fig. 6

Définition (Décomposition cellulaire \mathcal{C}^0). Une *décomposition cellulaire* \mathcal{C}^0 de \mathbb{R}^m ou plus simplement *décomposition cellulaire de \mathbb{R}^m* est une partition de \mathbb{R}^m en

cellules définies de la sorte :

- Lorsque $m = 1$, une décomposition cellulaire de \mathbb{R}^1 est un ensemble fini de semi-algébriques disjoints de \mathbb{R} qui recouvrent \mathbb{R} :

$(] - \infty, a_1[,]a_1, a_2[, \dots,]a_k, +\infty[, \{a_1\}, \dots, \{a_k\})$, avec $a_1 < \dots < a_k$.

- Lorsque $m > 1$, une décomposition cellulaire de \mathbb{R}^m est une partition $\{C_i\}_{i=1, \dots, \ell}$ de \mathbb{R}^m en cellules telle que l'ensemble $\{\pi(C_i)\}_{i=1, \dots, \ell}$ est une décomposition cellulaire de \mathbb{R}^{m-1} , avec $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ la projection sur les $m - 1$ premières composantes.

Une décomposition cellulaire \mathcal{D} de \mathbb{R}^m est dite *adaptée* à un semi-algébrique donné A ssi A est partitionné par un sous-ensemble de \mathcal{D} .

3.2. Théorème de décomposition cellulaire. Nous démontrons simultanément trois résultats fondamentaux de finitude globale pour les ensembles semi-algébriques (en réalité sur les ensembles définissables dans une structure o-minimale sur les réels) par récurrence sur la dimension de l'espace dans lequel on considère ces ensembles.

Théorème 3.1. Soit $m \in \mathbb{N}$.

(i) **Décomposition cellulaire.** $\mathcal{D}(m)$: Étant donné $\ell \in \mathbb{N}$ et $A_1, \dots, A_\ell \in \mathcal{SA}(m)$, il existe une décomposition cellulaire semi-algébrique de \mathbb{R}^m adaptée à $A_1, \dots, A_{\ell-1}$ et A_ℓ .

(ii) **Continuité par cellules.** $\mathcal{C}(m)$: Étant donné $A \in \mathcal{SA}(m)$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction semi-algébrique, il existe une décomposition cellulaire semi-algébrique de \mathbb{R}^m adaptée à A telle que la restriction de f à chacune des cellules de cette décomposition est continue.

(iii) **Finitude uniforme dans les fibres ponctuelles.** $\mathcal{F}(m)$: Soit $A \in \mathcal{SA}(m+1)$. Si quel que soit $x \in \mathbb{R}^m$, la fibre $A_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}; (x, y) \in A\}$ de la projection $\pi : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ est de cardinal fini, il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, $\text{Card}(A_x) \leq \alpha$.

Remarque. La preuve que nous donnons est celle de [Dri], elle est vraie dans n'importe quelle structure o-minimale sur les réels. Dans [Cos1] on trouve une preuve plus courte adaptée aux ensembles semi-algébriques.

Remarque. Une conséquence du Théorème 3.1.(iii), est que la fonction $x \mapsto \text{Card}(A_x)$ est semi-algébrique, lorsque A est semi-algébrique. Nous insistons sur cette question avant de faire la preuve du Théorème 3.1 :

- Notons que nous savons, indépendamment de 3.1.(iii), que les ensembles $B(k) = \{x \in \mathbb{R}^m; \text{Card}(A_x) \leq k\}$ sont semi-algébriques. En effet :

$$B(k) = \{x \in \mathbb{R}^m; (x, y_1) \in A, \dots, (x, y_{k+1}) \in A \Rightarrow \exists i, j \in \{1, \dots, k+1\}, i \neq j, y_i = y_j\}.$$

Il s'ensuit que les ensembles $\{x \in \mathbb{R}^m; \text{Card}(A_x) \geq k\}$ et $A(k) = \{x \in \mathbb{R}^m; \text{Card}(A_x) = k\}$ sont eux aussi semi-algébriques.

- Cependant la semi-algèbricité de $A(k)$ ne dit rien sur la semi-algèbricité de $\varphi : x \mapsto \text{Card}(A_x)$, sauf dans le cas où le nombre des B_k non vides est fini, car $\varphi = \sum_{k \in \mathbb{N}} k \cdot \mathbf{1}_{A(k)}$ (avec $\mathbf{1}_{A(k)}$ la fonction caractéristique de $A(k)$).

D'autre part une écriture directe de $\Gamma(\varphi)$ donne une formule quantifiée sur \mathbb{N} , qui n'est pas un semi-algèbrique de \mathbb{R}^m .

- En conclusion, contrairement aux ensembles $B(k)$ ou $A(k)$, on ne peut pas obtenir naïvement la semi-algèbricité de φ . Il faut passer par une preuve, celle de 3.1.(iii), et on doit donc prendre garde dans cette preuve à ne pas invoquer le caractère semi-algèbrique de φ . La semi-algèbricité de φ implique d'ailleurs sans plus d'effort que $\varphi(\mathbb{R}^m)$ est un semi-algèbrique de \mathbb{R} inclus dans \mathbb{N} et donc un ensemble fini de points, ce qui est 3.1.(iii).

Preuve. La preuve se fait par récurrence sur m .

• Le cas $m = 0$ est trivial, mais l'implication $\mathcal{D}(m) \ \& \ \mathcal{C}(m) \ \& \ \mathcal{F}(m) \Rightarrow \mathcal{F}(m+1)$ dans la preuve par récurrence qui va être donnée ci-dessous n'est pas valable pour $m = 0$. Il faut donc montrer $\mathcal{D}(1)$, $\mathcal{C}(1)$ et $\mathcal{F}(1)$. La proposition $\mathcal{D}(1)$ vient du fait que les semi-algèbriques de \mathbb{R} sont les réunions finies d'intervalles et de points, et $\mathcal{C}(1)$ est le théorème de monotonie 2.9. En revanche $\mathcal{F}(1)$ nécessite une preuve.

Preuve de $\mathcal{F}(1)$. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un semi-algèbrique tel que $\forall x \in \mathbb{R} \times \{0\}$, $\text{Card}(A_x) < \infty$. Montrons alors qu'existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R} \times \{0\}$, $\text{Card}(A_x) \leq \alpha$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ fixé et $A(n) = \{x \in \mathbb{R}; \text{Card}(A_x) \geq n\}$, $f_n : A(n) \rightarrow \mathbb{R}$ définis par : $f_n(x) =$ le $n^{\text{ième}}$ élément de A_x (les éléments de A_x étant rangés par ordre croissant). Les ensembles $A(n)$ sont semi-algèbriques d'après la remarque qui précède. Les fonctions f_n sont aussi semi-algèbriques, car $\Gamma(f_1) = \{(x, y) \in A; (x, z) \in A \Rightarrow y \leq z\}$, f_2 est obtenu ensuite comme f_1 , après avoir retranché $\Gamma(f_1)$ à A etc...

On considère alors dans \mathbb{R} deux ensembles, \mathcal{B} et \mathcal{M} (les ensembles des bons et des mauvais points) tels que $\mathcal{B} \sqcup \mathcal{M} = \mathbb{R}$ et qui sont définis comme suit. À tout $a \in \mathbb{R}$ on associe $n_a \in \mathbb{N}$, l'entier n maximal tel que sur un certain voisinage de a dans \mathbb{R} les fonctions f_1, \dots, f_n soient définies et continues. Notons que $a \in A(n_a)$ et qu'il est possible que $n_a = 0$. Par définition, le point a est dans \mathcal{B} ssi $a \notin \bar{A}(n_a + 1)$ et le point a est dans \mathcal{M} ssi $a \in \bar{A}(n_a + 1)$. Comme n_a est défini par la variable n quantifiée sur \mathbb{N} et que \mathbb{N} n'est pas semi-algèbrique dans \mathbb{R} :

$$n_a = \max\{n \in \mathbb{N}; \exists \eta > 0, f_1, \dots, f_n \text{ sont continues sur }]a - \eta, a + \eta[\},$$

il s'ensuit qu'on ne peut garantir *a priori* que \mathcal{B} et \mathcal{M} sont des ensembles semi-algèbriques de \mathbb{R} , sauf à supposer que $\{n \in \mathbb{N}; A(n) \neq \emptyset\}$ est fini, mais c'est précisément ce que nous voulons démontrer. Nous allons pour démontrer que \mathcal{B} et \mathcal{M} sont semi-algèbriques dans \mathbb{R} introduire la notion de point simple, qui peut être définie par une formule du premier ordre et qui caractérise les points de \mathcal{B} .

Un point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est dit *simple* lorsqu'existent I, J deux intervalles contenant respectivement a et b et tels que $(I \times J) \cap A$ est soit vide soit le graphe d'une fonction continue sur I .

Un point $(a, +\infty) \in \mathbb{R} \times \bar{\mathbb{R}}$ est dit *simple* lorsque qu'existent I un intervalle contenant a et J du type $]b, +\infty[$ tels que $(I \times J) \cap A = \emptyset$.

Un point $(a, -\infty) \in \mathbb{R} \times \bar{\mathbb{R}}$ est dit *simple* lorsque qu'existent I un intervalle contenant a et J du type $] -\infty, b[$ tels que $(I \times J) \cap A = \emptyset$.

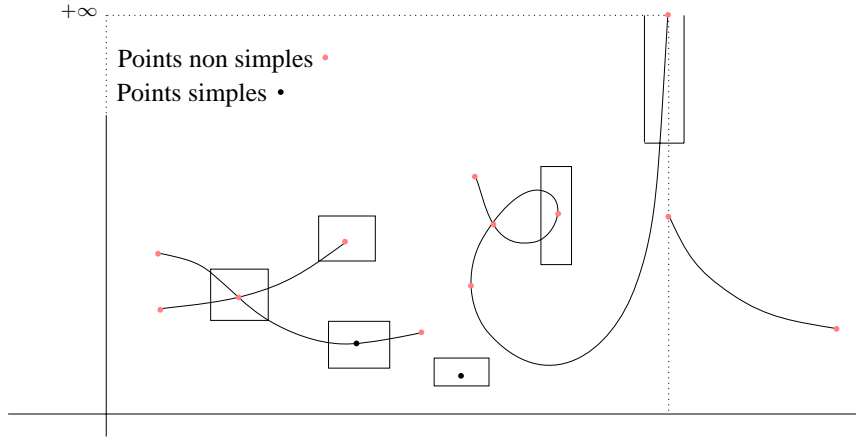


Fig. 7

Les ensembles : $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2; (a, b) \text{ est simple}\}$, $\{a \in \mathbb{R}; \exists b \in \bar{\mathbb{R}}, (a, b) \text{ est simple}\}$, $\{a \in \mathbb{R}; (a, +\infty) \text{ est simple}\}$, $\{a \in \mathbb{R}; (a, -\infty) \text{ est simple}\}$ sont des ensembles semi-algébriques.

Si $a \in \mathcal{B}$, il existe un voisinage de a qui ne rencontre pas $A(n_a + 1)$, donc $Card(A_x)$ est constant au voisinage de a , égal à n_a . De plus par définition de \mathcal{B} et d'un point simple :

$$a \in \mathcal{B} \Rightarrow \forall b \in \bar{\mathbb{R}}, (a, b) \text{ est simple.} \quad (*)$$

En réalité (*) est une caractérisation complète de \mathcal{B} , car nous allons prouver :

$$a \in \mathcal{M} \Rightarrow \exists b \in \bar{\mathbb{R}}, (a, b) \text{ est non simple.} \quad (**)$$

Il s'ensuivra que \mathcal{B} et donc \mathcal{M} sont des semi-algébriques, puisque l'ensemble des points simples l'est. Prouvons donc (**). Soient $a \in \mathcal{M}$ et :

$$\ell^-(a) = \lim_{x \uparrow a} f_{n_a+1}(x) \text{ ou } +\infty, \text{ selon que } f_{n_a+1} \text{ est définie sur un intervalle }]t, a[\text{ ou pas,}$$

$$\ell^+(a) = \lim_{x \downarrow a} f_{n_a+1}(x) \text{ ou } +\infty, \text{ selon que } f_{n_a+1} \text{ est définie sur un intervalle }]a, t[\text{ ou pas,}$$

$$\ell(a) = f_{n_a+1}(a) \text{ ou } +\infty, \text{ selon que } a \in A(n_a + 1) \text{ ou pas.}$$

On définit alors le point b de (**) comme étant $\min\{\ell^-(a), \ell^+(a), \ell(a)\}$. Le point b est un point tel que (a, b) est non simple.

Maintenant si $\mathcal{M} = \{a_1, \dots, a_k\}$ est fini, sur les intervalles $] -\infty, a_1[$, $]a_1, a_2[$, \dots , $]a_k, +\infty[$ la fonction $x \mapsto \text{Card}(A_x)$ étant localement constante, elle est constante sur chacun de ces intervalles.

Supposons alors pour terminer la preuve de $\mathcal{F}(1)$ que \mathcal{M} est infini. Le point $b = b(a)$ étant défini comme dans la preuve de (***) ci-dessus, ie étant le plus petit des points y tel que (a, y) est non simple, on considère :

$$\mathcal{M}_- = \{a \in \mathcal{M}; \exists y, y < b(a) \ \& \ (a, y) \in A\}$$

$$\mathcal{M}_+ = \{a \in \mathcal{M}; \exists y, y > b(a) \ \& \ (a, y) \in A\}$$

$$b(a)_- = \max\{y; y < b(a) \ \& \ (a, y) \in A\}$$

$$b(a)_+ = \min\{y; y > b(a) \ \& \ (a, y) \in A\}$$

Comme \mathcal{M} est infini et que les quatre semi-algébriques : $\mathcal{M}_- \setminus \mathcal{M}_+$, $\mathcal{M}_+ \setminus \mathcal{M}_-$, $\mathcal{M}_- \cap \mathcal{M}_+$ et $\mathcal{M} \setminus (\mathcal{M}_- \cup \mathcal{M}_+)$ déterminent une partition de \mathcal{M} , un de ces quatre ensembles contient un intervalle I . D'après le théorème de monotonie, les fonctions $a \mapsto b(a)$, $a \mapsto b_-(a)$ et $a \mapsto b_+(a)$ étant semi-algébriques, sont continues sur un sous-intervalle J de I , qui est partitionné en deux sous-ensembles semi-algébriques :

$$J = \{x \in J; (x, b(x)) \in A\} \sqcup \{x \in J; (x, b(x)) \notin A\}.$$

Un de ces deux sous-ensembles contient ainsi un intervalle K . On a ainsi : $\Gamma(b|_K) \subset A$ ou $\Gamma(b|_K) \cap A = \emptyset$. Dans les deux cas et quel que soit l'ensemble $\mathcal{M}_- \setminus \mathcal{M}_+$, $\mathcal{M}_+ \setminus \mathcal{M}_-$, $\mathcal{M}_- \cap \mathcal{M}_+$ ou $\mathcal{M} \setminus (\mathcal{M}_- \cup \mathcal{M}_+)$ d'appartenance de K , la continuité de b , b_- et b_+ garantie que les points de $\Gamma(b|_K)$ sont des points simples, or les points $(x, b(x))$ ne sont pas simples. Ceci termine la preuve de $\mathcal{F}(1)$.

• Supposons maintenant que $m \geq 1$, que $\mathcal{F}(j)$, $\mathcal{C}(j)$ et $\mathcal{D}(j)$ sont vrais pour $0 \leq j \leq m$ et montrons que $\mathcal{F}(m+1)$ est vrai.

Soit pour cela $Y \subset \mathbb{R}^{m+1} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ un ensemble tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, $\text{Card}(Y_x) < \infty$. Montrons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, $\text{Card}(Y_x) < N$.

Soit B un pavé de \mathbb{R}^m (un produit de m intervalles ouverts) et supposons que chaque point de B est couvert par Y , ie que pour tout $x \in B$, il existe un pavé $P \subset B$ contenant x , tel que pour tout $x' \in P$ avec $(x', y) \in Y$ existe I un intervalle ouvert contenant y tel que : $(P \times I) \cap Y$ est le graphe $\Gamma(f)$ d'une application continue $f : P \rightarrow \mathbb{R}$. Nous commençons par montrer :

(i) Il existe $f_1 < \dots < f_k \in \mathcal{C}(B)$ telles que : $(B \times \mathbb{R}) \cap Y = \Gamma(f_1) \cup \dots \cup \Gamma(f_k)$.

Soit $x \in B$ et $k = \text{Card}(Y_x)$. Puisque par hypothèse x est couvert par Y , il existe un pavé P contenant x et pour tout $y_1 < \dots < y_k \in \mathbb{R}$ tels que $(x, y_i) \in Y$, il existe un intervalle ouvert I_i contenant y_i , $f_i \in \mathcal{C}(P)$ tels que $(P \times I_i) \cap Y = \Gamma(f_i)$. On ne

peut avoir $f_i(p) = f_j(p)$, avec $p \in P$, que si $f_i = f_j$ dans un voisinage de p , de sorte que par connexité de P et continuité des f_i , les inégalités $y_1 < \dots < y_k$ garantissent que $f_1 < \dots < f_k$ sur P . Enfin si $(x', y) \in (P \times \mathbb{R}) \cap Y$, comme x est couvert par Y (au-dessus de P), il existe un intervalle I contenant y et $f \in \mathcal{C}(P)$ tels que $(P \times I) \cap Y = \Gamma(f)$. On en déduit que $f(x) = y_{i_0} = f_{i_0}$, pour un certain $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ puis, comme précédemment, f coïncide avec f_{i_0} ou voisinage de x . Ceci prouve (i) localement sur B et que l'ensemble $\{x' \in B; \text{Card}(Y_{x'}) = k\}$ est fermé et ouvert dans B . Donc que $x \mapsto \text{Card}(Y_x)$ est constant sur B . Il s'ensuit que (i) a lieu globalement sur B , à nouveau par connexité de B .

Nous montrons maintenant le point suivant :

(ii) Chaque pavé ouvert B de \mathbb{R}^m contient un point couvert par Y .

Écrivons : $B = B' \times]a, b[$, avec B' pavé de \mathbb{R}^{m-1} et soit pour $p \in B'$:

$$Y_{(p)} = \{(q, y) \in]a, b[\times \mathbb{R}; (p, q, y) \in Y\}.$$

Pour tout $q \in]a, b[$, $\text{Card}((Y_p)_q) < \infty$, par hypothèse, de sorte que par $\mathcal{F}(1)$ et le Théorème de monotonie 2.9 (appliqué aux fonctions f_i qui donne le $i^{\text{ième}}$ point dans la fibre au-dessus des points de Y_p), il existe un nombre fini de points de $]a, b[$ qui ne sont pas couverts par $Y_{(p)}$. Ceci assure que le semi-algébrique :

$$\mathcal{M}(Y) = \{(p, q) \in B; (p, q) \text{ n'est pas couvert par } Y(p)\}$$

est d'intérieur vide dans B .

D'après $\mathcal{D}(m)$ il existe une décomposition cellulaire de B adaptée à $\mathcal{M}(Y)$. Une cellule ouverte de cette décomposition ne rencontrant pas $\mathcal{M}(Y)$, quitte à diminuer B , on peut supposer que pour tous les points (p, q) de B , (p, q) est couvert par $Y(p)$, ce qui d'après (i) appliqué à $\{p\} \times]a, b[$ et $Y(p)$ impose qu'existe pour tout $p \in B'$ un entier $k(p)$ tel que $\text{Card}(A_x) = k(p)$, avec $x = (p, q)$.

Nous allons prouver que la famille $(k(p))_{p \in B'}$ est bornée.

Pour cela on fixe cette fois-ci $q \in]a, b[$. Comme la fibre de $Y(q) = \{(p, y) \in B' \times \mathbb{R}; (p, q, y) \in Y\}$ au-dessus de tout $p \in B'$ est finie, par l'hypothèse $\mathcal{F}(m)$ il existe $N(q)$ tel que $\text{Card}(\{(p, q, y) \in B \times \mathbb{R}; (p, q, y) \in Y\}) \leq N(q)$, soit pour tout $p \in B'$, $k(p) \leq N(q)$. Ce qui montre que la famille $(k(p))_{p \in B'}$ est bornée. Notons N une telle borne.

En conséquence les semi-algébriques $B(i) = \{x \in B; \text{Card}(Y_x) = i\}$ sont en nombre fini, ainsi que les fonctions semi-algébriques $f_{i,j} : B(i) \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $f_{i,j}(x)$ est le $j^{\text{ième}}$ point dans la fibre Y_x . D'après $\mathcal{D}(m)$ et $\mathcal{C}(m)$ il existe une décomposition cellulaire compatible avec chaque $B(i)$ sur les cellules de laquelle chaque $f_{i,j}$ est continue. Comme le pavé B est réunion finie des $B(i)$, une cellule est nécessairement contenue dans un des $B(i)$, et tous les points de cette cellule sont alors couverts par Y , ce qui achève le preuve de (ii).

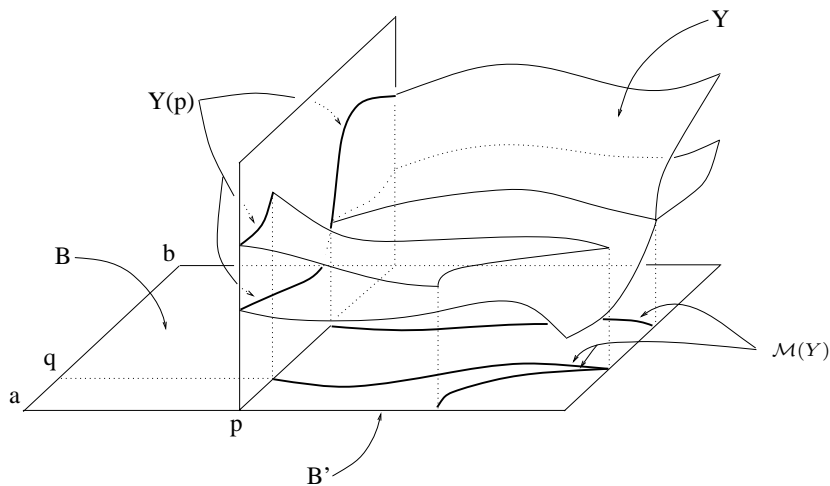


fig.8

Pour prouver $\mathcal{F}(m + 1)$ il suffit maintenant de considérer une décomposition de \mathbb{R}^m compatible avec les points de \mathbb{R}^m couverts par Y (qui est semi-algébrique). Par (ii), une cellule ouverte de $\pi(Y)$ contenant nécessairement un point couvert par Y , ne contient que des points couverts par Y et d'après (i) les fibres au-dessus de cette cellule sont uniformément bornées. Si C est une cellule non ouverte, elle est homéomorphe à une cellule de dimension $< m$, par la remarque qui clôt 3.1. En conséquence au-dessus d'une telle cellule, les fibres sont uniformément bornées aussi (les arguments précédents, essentiellement la connexité sont valables à homéomorphisme semi-algébrique près). Le nombre de cellules étant fini, la preuve de $\mathcal{F}(m + 1)$ est terminée.

- Supposons que $\mathcal{D}(m)$, $\mathcal{F}(m)$ et $\mathcal{C}(m)$ sont vrais et montrons que $\mathcal{D}(m + 1)$ est vrai.

Soient $A_1, \dots, A_\ell \in \mathcal{SA}(m + 1)$, montrons qu'il existe une décomposition cellulaire semi-algébrique de \mathbb{R}^m adaptée à $A_1, \dots, A_{\ell-1}$ et A_ℓ .

Rappelons que si S est un semi-algébrique de \mathbb{R} , on note $\partial S = \bar{S} \setminus \text{Int}(S)$. Il s'ensuit que ∂S est une réunion finie de points et que l'intervalle déterminé par deux points consécutifs (éventuellement $-\infty$ ou $+\infty$) de S est soit dans S soit dans $\mathbb{R} \setminus S$. Considérons $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+1}; y \in \partial(A_1)_x \cup \dots \cup \partial(A_\ell)_x\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, Y_x est de cardinal fini, puisque $Y_x = \partial(A_1)_x \cup \dots \cup \partial(A_\ell)_x$. D'après $\mathcal{F}(m + 1)$ il existe un entier N tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, $\text{Card}(Y_x) \leq N$. Par conséquent les $B(i) = \{x \in \mathbb{R}^m; \text{Card}(Y_x) = i\}$ sont en nombre fini. Soient $\xi_{i0}, \xi_{i1}, \dots, \xi_{ii}, \xi_{ii+1}$ les fonctions définies sur $B(i)$ par $Y_x = \{\xi_{i1}(x), \dots, \xi_{ii}(x)\}$, $\xi_{i1}(x) < \dots < \xi_{ii}(x)$, et $\xi_{i0}(x) = -\infty$, $\xi_{ii+1}(x) = +\infty$. On pose, pour tout $k \in \{1, \dots, \ell\}$, $i \in \{0, \dots, N\}$ et

$j \in \{1, \dots, i\}$:

$$C_{kij} = \{x \in B_i; \xi_{ij}(x) \in (A_k)_x\}$$

$$D_{kij} = \{x \in B_i;]\xi_{ij}(x), \xi_{ij+1}(x)[\in (A_k)_x\}$$

Soit maintenant par, $\mathcal{D}(m)$ puis $\mathcal{C}(m)$, \mathcal{D}^m une décomposition cellulaire de \mathbb{R}^m compatible avec les C_{kij} , les D_{kij} et dont la restriction des ξ_{ij} aux cellules contenues dans B_i sont continues. Au-dessus de chaque cellule D de \mathcal{D}^m contenue dans $B(i)$, on définit les cellules :

$$D' = \{]\xi_{i0|D}, \xi_{i1|D}[, \dots,]\xi_{ii|D}, \xi_{ii+1|D}[, \Gamma(\xi_{i1|D}), \dots, \Gamma(\xi_{ii|D})\},$$

avec $]\xi_{ij|D}, \xi_{ij+1|D}[= \{(x, y) \in D \times \mathbb{R}; y \in]\xi_{ij}(x), \xi_{ij+1}(x)[\}$. Alors $\mathcal{D}^{m+1} = \bigcup_{D \in \mathcal{D}^m} D'$

est une décomposition cellulaire semi-algébrique de \mathbb{R}^{m+1} compatible avec les A_k , $k \in \{1, \dots, \ell\}$. Ceci termine la preuve de $\mathcal{D}(m+1)$.

• Enfin, supposons que $\mathcal{D}(m)$, $\mathcal{F}(m)$ et $\mathcal{C}(j)$, $j \in \{0, \dots, m\}$ sont vrais et montrons que $\mathcal{C}(m+1)$ est vrai.

Soient $A \in \mathcal{SA}(m+1)$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction semi-algébrique. On cherche une décomposition cellulaire de A sur les cellules de laquelle la restriction de f soit continue. On remarque que d'après $\mathcal{D}(m)$, on peut supposer que A est lui-même une cellule. Si A est une cellule fermée, A est tout de même homéomorphe semi-algébriquement à une cellule ouverte par une projection bien choisie sur un espace de n coordonnées, $n < m$, de sorte que si le raisonnement que l'on va faire pour les cellules ouvertes est aussi valable à homéomorphisme semi-algébrique près des cellules ouvertes, le cas des cellules fermés est traité par $\mathcal{C}(n)$. Supposons donc que A est une cellule ouverte de \mathbb{R}^{m+1} .

On commence par remarquer que si une fonction $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ est telle que :

- $\forall x \in \mathbb{R}^m$, $f(x, \cdot)$ est continue et montone sur \mathbb{R} ,
- $\forall (x, r) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, $f(\cdot, r)$ est continue en x .

(*) Alors cette fonction est continue.

En effet, si $(x, r) \in \mathbb{R}^{m+1}$, et si J est un intervalle ouvert de \mathbb{R} , soit $I =]a, b[$ contenant r tel que $f(x, I) \subset J$ et U un voisinage ouvert de x tel que $f(U, a) \subset J$ et $f(U, b) \subset J$. Alors facilement $f(U \times I) \subset J$.

Un point (x, r) de $A \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ est dit \mathcal{C} -régulier s'il existe un pavé ouvert $P \subset \mathbb{R}^m$ contenant x , un intervalle $]a, b[$ contenant r , tels que $P \times]a, b[\subset A$ et :

- $\forall x' \in P$, $f(x', \cdot)$ est continue et montone sur $]a, b[$,
- $f(\cdot, r)$ est continue en x .

On note $A^{\mathcal{C}}$ l'ensemble des points \mathcal{C} -réguliers de A et on montre que $A^{\mathcal{C}}$ est dense dans A . Soit pour cela un pavé Q de \mathbb{R}^m et $]c, d[$ tels que $Q \times]c, d[\subset A$. Montrons que $(Q \times]c, d[) \cap A^{\mathcal{C}} \neq \emptyset$.

D'après le théorème 2.9 de monotonie, pour tout $x \in Q$, il existe $c(x) \in]c, d[$ tel que $f(x, \cdot)$ est continue et montone sur $]c, c(x)[$. La fonction $c : Q \rightarrow \mathbb{R}$ étant semi-algébrique, il existe par $\mathcal{C}(m)$ une décomposition cellulaire de Q sur les cellules de laquelle c

est continue, et donc un pavé ouvert $Q' \subset Q$ sur lequel c est continue et $c(x)$ est minoré par $\gamma > c$. Soit alors $r \in]c, \gamma[$. Par $\mathcal{C}(m)$, la fonction $f(\cdot, r)$ est continue sur un pavé ouvert $Q'' \subset Q$. Ceci prouve que $(Q'' \times]c, \gamma[) \cap A^{\mathcal{C}} \neq \emptyset$.

Soit enfin une décomposition cellulaire \mathcal{D} de \mathbb{R}^{m+1} compatible avec A et $A^{\mathcal{C}}$ et D une cellule ouverte de \mathcal{D} . La densité de $A^{\mathcal{C}}$ dans A assure que si $D \subset A$, $D \subset A^{\mathcal{C}}$. Il s'ensuit que f est continue sur D par (*). Comme notre raisonnement est valable pour les cellules à homéomorphisme semi-algébrique près, par la remarque qui débute la preuve, si D est fermée, $\mathcal{C}(n)$, pour un certain $n < m$, assure la conclusion et termine la preuve de $\mathcal{C}(m+1)$. \square

3.3. Composantes connexes des ensembles définissables. Le Théorème 3.1 permet de voir un ensemble semi-algébrique ou définissable dans une structure o-minimale sur les réels comme une réunion finie de morceaux, des cellules, particulièrement simples du point de vue topologique, chacun d'eux étant semi-algébriquement homéomorphe à un pavé ouvert. On va voir un peu plus loin que l'on peut obtenir ce type de décomposition avec des cellules "lisses", c'est-à-dire \mathcal{C}^∞ -difféomorphes à des pavés ouverts. Mais avant cela on tire du théorème de décomposition \mathcal{C}^0 les corollaires importants concernant la topologie des semi-algébriques. Ceux-ci généralisent le fait qu'un ensemble semi-algébrique de \mathbb{R} possède un nombre fini de composantes connexes et que celles-ci sont semi-algébriques :

Théorème 3.2. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{SA}(m)$.

(i) **Composantes connexes.** Le nombre de composantes connexes de A est fini, celles-ci sont connexes par arcs semi-algébriques et sont semi-algébriques.

(ii) **Finitude uniforme dans les fibres** (†). Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $m = n + p$, et $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une projection sur un choix de n coordonnées parmi m . Le nombre de composantes connexes des fibres de $\pi|_A : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ est uniformément borné.

(iii) **Connexité locale.** A est localement connexe par arcs semi-algébriques.

Preuve. (i) Soit $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_\ell\}$ une décomposition cellulaire semi-algébrique finie de A . Notons que chaque cellule est connexe par arcs semi-algébriques. Si $K \subset A$ est connexe, soient D_{i_1}, \dots, D_{i_k} les cellules qui rencontrent K . La réunion $\bigcup_{j=1}^k D_{i_j}$ est alors connexe. Il s'ensuit que les composantes connexes semi-algébriques de A sont des réunions de cellules, donc sont en nombre fini et sont semi-algébriques. Une telle réunion est connexe par arcs semi-algébriques.

(ii) Commençons par supposer que l'on projette sur les n premières coordonnées. Soit $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_\ell\}$ une décomposition cellulaire semi-algébrique de A construite par récurrence sur les coordonnées de \mathbb{R}^m en respectant leur ordre. Alors la fibre $A_x = \pi^{-1}(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \times \{0\}^p$ admet la décomposition cellulaires $\{A_x \cap$

(†) On appelle parfois cette propriété la propriété de A. Gabrielov.

$D_1, \dots, A_x \cap D_\ell\}$, ce qui prouve que le nombre de composantes connexes de A_x est borné par le nombre de sous-décomposition de cette décomposition, nombre qui ne dépend pas de x mais uniquement de ℓ .

Maintenant si l'on projette sur un choix quelconque de n coordonnées, on considère A' l'image de A par la permutation des coordonnées de \mathbb{R}^m qui amène les coordonnées sur lesquelles on projette aux n premières places. On applique ensuite ce qui précède à A' .

(iii) Soit $x \in A$ et B une boule contenant x . Alors $A \cap B$ est un semi-algébrique dont le nombre de composantes connexes est fini. Celles-ci sont donc ouvertes dans $A \cap B$ (puisque fermées et en nombre fini). La composante connexe que $A \cap B$ qui contient x est donc aussi un voisinage ouvert de x dans A . \square

3.4. Décompositions cellulaires définissables lisses - Stratifications.

La preuve du théorème 3.1 de décomposition cellulaire assure que la topologie d'un ensemble semi-algébrique (resp. définissable dans une structure o-minimale) est simple : tout ensemble semi-algébrique (resp. définissable dans une structure o-minimale) se décompose en un nombre fini de cellules homéomorphes (par des homéomorphismes semi-algébriques (resp. définissables) à des pavés ouverts. On peut se demander si la propriété \mathcal{C}^0 dans cet énoncé peut être remplacé par \mathcal{C}^k , pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, c'est-à-dire si les homéomorphismes peuvent être des difféomorphismes \mathcal{C}^k , $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.



La réponse, pour la première fois dans ce cours, n'est pas la même dans le cas semi-algébrique et dans le cas d'une structure o-minimale générale sur les réels. Si les semi-algébriques admettent bien des décompositions cellulaires semi-algébriques \mathcal{C}^∞ , il n'en va pas de même des ensembles de toutes les structures o-minimales. Celles-ci admettent toujours des décompositions cellulaires \mathcal{C}^k , quel que soit $k \in \mathbb{N}$, mais certaines d'entre elles n'admettent pas de décompositions cellulaires \mathcal{C}^∞ , comme le prouvent O. Le Gal et J.-Ph. Rolin dans [Le G-Rol].

Nous expliquons dans cette section comment prouver le théorème de décomposition cellulaire \mathcal{C}^k pour les ensembles définissables dans une structure o-minimale et le théorème de décomposition cellulaire \mathcal{C}^∞ pour les ensembles semi-algébriques. Nous commençons par définir la notion de décomposition cellulaire \mathcal{C}^k , $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Définition. Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et \mathcal{S} une structure o-minimale sur les réels. Une cellule \mathcal{C}^k , définissable (dans \mathcal{S}) et une décomposition cellulaire définissables (dans \mathcal{S}) \mathcal{C}^k de \mathbb{R}^n se définissent par récurrence sur n , de la même façon qu'une cellule \mathcal{C}^0 et une décomposition cellulaire \mathcal{C}^0 (cf section 3.1), mais on remplace "continue" par \mathcal{C}^k pour les fonctions f, g définissant les cellules par leur graphe $\Gamma(f)$ ou les domaines $]f, g[$. Ces fonctions étant toutes dans \mathcal{S} .

Proposition 3.3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définissable dans une structure o-minimale. Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, il existe un nombre fini de points de \mathbb{R} en dehors desquels f est \mathcal{C}^k .

Preuve. Il suffit de montrer cette proposition pour $k = 1$, puis de l'appliquer k fois. Les dérivées f'_d, f'_g , à droite et à gauche de f sont bien définies, car pour x fixé dans \mathbb{R} , les fonctions $h \rightarrow (f(x+h) - f(x))/h$ sont définissables et admettent donc une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, quand $h \nearrow 0$ ou $h \searrow 0$, par le théorème de monotonicité. Les fonctions f'_d et f'_g sont définissables, en tant que limites de fonctions définissables. Le point délicat est de démontrer que l'ensemble des points x en lesquels $f'_d(x)$ ou $f'_g(x) \in \{-\infty, +\infty\}$ est fini. Ce point se démontre assez facilement par des arguments de stricte monotonicité (cf [Dri], Lemme 3 p. 110). Maintenant par le théorème de monotonicité il existe un nombre fini de points dans \mathbb{R} en dehors desquels f'_d et f'_g sont continues. En dehors de ces points nous avons $f'_g = f'_d$, égalité dans \mathbb{R} . En effet, sinon il existe un intervalle I sur lequel $f'_g < c < f'_d$ (par exemple) avec $c \in \mathbb{R}$. Mais alors la fonction définissable $g(x) = f(x) - cx$ est telle que $g'_g(x) < 0$ et $g'_d(x) > 0$ sur I . Or à nouveau d'après le théorème de monotonicité, comme g est strictement monotone ou constante par intervalle, on aurait par $g'_g(x) < 0$ que g est strictement décroissante sur I et par $g'_d(x) > 0$ que g est strictement croissante sur I , ce qui est contradictoire. En conclusion en dehors d'un nombre fini de points, $f'_g = f'_d$ et donc f est dérivable endehors de ces points. Quitte à affiner la décomposition de \mathbb{R} , on peut supposer qu'en dehors d'un nombre fini de points de \mathbb{R} , f' est continue. \square

On peut maintenant prouver l'équivalent \mathcal{C}^k des Théorèmes 3.1.(i) et 3.1.(ii) :

Théorème 3.4 (décomposition cellulaire définissables \mathcal{C}^k). Soient $m, k \in \mathbb{N}$ et \mathcal{S} une structure o-minimale sur les réels.

(i) **Décomposition cellulaire \mathcal{C}^k .** $\mathcal{D}^k(m)$: Étant donnés $\ell \in \mathbb{N}$ et A_1, \dots, A_ℓ des ensembles de \mathbb{R}^m définissables dans \mathcal{S} , il existe une décomposition cellulaire \mathcal{C}^k définissable (dans \mathcal{S}) de \mathbb{R}^m adaptée à $A_1, \dots, A_{\ell-1}$ et A_ℓ .

(ii) **Caractère \mathcal{C}^k par cellules.** $\mathcal{C}^k(m)$: Étant donnés $A \in \mathbb{R}^m$ un ensemble définissable et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définissable (dans \mathcal{S}), il existe une décomposition cellulaire définissable et \mathcal{C}^k de \mathbb{R}^m , adaptée à A , telle que la restriction de f à chacune des cellules de cette décomposition est \mathcal{C}^k .

Preuve. Comme pour la Proposition 3.3, il suffit de démontrer ce théorème pour $k = 1$, puis de l'appliquer ensuite $k - 1$ fois aux dérivées partielles de f . Comme le Théorème 3.1, ce théorème se démontre par récurrence sur m . On démontre simultanément (i) et (ii). L'étape $\mathcal{D}^1(1)$ est triviale et l'étape $\mathcal{C}^1(1)$ est la Proposition 3.3. L'implication $(\mathcal{D}^1(m) \ \& \ \mathcal{C}^1(m)) \Rightarrow \mathcal{D}^1(m+1)$ est la même que dans la preuve du Théorème 3.1, où l'on remplace partout \mathcal{C}^0 par \mathcal{C}^1 .

On prouve $\mathcal{C}^1(m+1)$ ainsi :

Par $\mathcal{D}^1(m+1)$, soit $D = D' \times]a, b[$ une cellule d'une décomposition cellulaire définissable \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^{m+1} (toutes les cellules ouvertes de \mathbb{R}^{m+1} sont \mathcal{C}^1 -difféomorphes à une telle cellule et nos raisonnements sont encore vrais à \mathcal{C}^1 -difféomorphisme près). Il existe alors, pour tout $p \in D'$, $\alpha(p), \beta(p) \in]a, b[$ tels que $\alpha(p) < \beta(p)$ et la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}$ est définie

et \mathcal{C}^1 sur $\{p\} \times]\alpha(p), \beta(p)[$ (d'après la Proposition 3.3). Comme les fonctions $p \mapsto \alpha(p)$ et $p \mapsto \beta(p)$ peuvent être choisies définissables (le faire en exercice), par le théorème de décomposition cellulaire \mathcal{C}^0 , on peut supposer que ces fonctions sont continues sur D' et donc à nouveau quitte à diminuer D' et $]a, b[$, on peut supposer que $\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}$ est définie et \mathcal{C}^1 sur $D' \times]a, b[$. En appliquant $\mathcal{C}^1(m)$ à f , on voit que D contient un point au voisinage duquel f est \mathcal{C}^1 , lorsque D est ouverte. Soit maintenant par $\mathcal{D}^1(m+1)$ une décomposition \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^{m+1} compatible avec l'ensemble \mathcal{E}^d des points de \mathbb{R}^{m+1} au voisinage desquels f est \mathcal{C}^1 . Une cellule ouverte de cette décomposition rencontre \mathcal{E}^d par ce qui précède. Quant aux cellules fermées F , elles sont \mathcal{C}^1 -difféomorphes à des cellules ouvertes de \mathbb{R}^d , $d < m+1$ et nos arguments de densité de \mathcal{E}^k s'appliquent aux cellules F qui se décomposent à leur tour. \square

Comme on l'a annoncé en introduction, on ne peut espérer que dans une structure o-minimale quelconque ce théorème soit valable avec ∞ à la place de $k \in \mathbb{N}$ (cf [Le G-Roll]). En revanche, pour la structure o-minimale particulière \mathcal{SA} des semi-algébriques, l'équivalent \mathcal{C}^∞ et même \mathcal{C}^ω du Théorème 3.4 a lieu. Nous allons expliquer comment on démontre ce résultat. Les points essentiels en semi-algèbre sont les suivants :

- D'une part les fonctions de base qui définissent les semi-algébriques, ie les polynômes, sont \mathcal{C}^ω ,

- D'autre part nous pouvons, comme dans la preuve de $\mathcal{D}(m+1)$ du Théorème 3.1, définir au-dessus de semi-algébriques de \mathbb{R}^m des fonctions semi-algébriques ξ_{ij} qui décomposent le semi-algèbre que l'on s'est donné. Celles-ci peuvent être choisies comme les fonctions qui aux paramètres $x \in \mathbb{R}^m$ associent les racines des polynômes $P_\ell(x, Y)$ définissant le semi-algèbre. En prenant en compte toutes les dérivées partielles successives suivant la dernière variable de ces polynômes, on obtient une partition des paramètres sur les morceaux de laquelle les racines sont \mathcal{C}^ω (par le théorème des fonctions implicites analytiques). Il est essentiel dans ce processus de découpage que les dérivées partielles successives par rapport à une même variable donnée soient en nombre fini.

Pour résumer, l'obtention de décompositions cellulaires \mathcal{C}^ω semi-algébriques des semi-algébriques est due au fait que les polynômes qui définissent les semi-algébriques sont \mathcal{C}^ω et possèdent un nombre fini de dérivées partielles itérées suivant une même variable donnée.

Théorème 3.5 (décompositions cellulaires semi-algébriques \mathcal{C}^ω). Soit $m \in \mathbb{N}$.

(i) $\mathcal{D}^\omega(m)$: Étant donné $\ell \in \mathbb{N}$ et A_1, \dots, A_ℓ des ensembles de \mathbb{R}^m semi-algébriques, il existe une décomposition cellulaire \mathcal{C}^ω semi-algébrique de \mathbb{R}^m adaptée à $A_1, \dots, A_{\ell-1}$ et A_ℓ .

(ii) $\mathcal{C}^\omega(m)$: Étant donné $A \in \mathbb{R}^m$ un ensemble semi-algébrique et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

une fonction semi-algébrique, il existe une décomposition cellulaire semi-algébrique et \mathcal{C}^ω de \mathbb{R}^m , adaptée à A , telle que la restriction de f à chacune des cellules de cette décomposition est \mathcal{C}^ω .

Remarque. Nous suivons la preuve de [Boc-Cos-Roy], Théorème 9.1.4 (cf aussi [Cos1]). On trouve en page 242 de [Boc-Cos-Roy] des références bibliographiques plus lointaines de cette méthode de preuve.

Preuve. La preuve de (ii) est celle de (i) appliquée au semi-algébrique particulier $\Gamma(f)$. Montrons alors (ii). On considère une famille de polynômes définissant les A_i . Cette famille peut être complétée (à changement linéaire de coordonnées près) en une famille \mathcal{F} , dite stratifiante (cf [Boc-Cos-Roy], Définition 9.1.1), c'est-à-dire que $\mathcal{F} = (f_{ij})_{i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, \ell_i\}}$ et :

- Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, quel que soit $j \in \{1, \dots, \ell_i\}$ $f_{ij} \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_i]$,
- f_{ij} est préparé en la variable X_i :

$$f_{ij}(X_1, \dots, X_i) = g_{ij}^d X_i^d + g_{ij}^{d-1}(X_1, \dots, X_{i-1})X_i^{d-1} + \dots + g_{ij}^0(X_1, \dots, X_{i-1}),$$

avec $g_{ij}^d \in \mathbb{R}^*$.

- $(f_{ij})_{j \in \{1, \dots, \ell_i\}}$ est stable par $\frac{\partial}{\partial X_i}$.

- Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. La famille $(f_{ij})_{i \in \{1, \dots, k-1\}, j \in \{1, \dots, \ell_i\}}$ définit une partition de \mathbb{R}^{m-1} en des semi-algébriques $A_1^k, \dots, A_{n_k}^k$ et il existe des fonctions semi-algébriques $\xi_{r_1}^k < \dots < \xi_{r_{m_r}}^k : A_r^k \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in A_r^k$, les racines des $f_{k1}(x, Y), \dots, f_{k\ell_k}(x, Y)$ non identiquement nuls sont les $\xi_{r_1}^k(x), \dots, \xi_{r_{m_r}}^k(x)$.

- Pour tout $x \in A_r^k$, les signes de $f_{k1}(x, y), \dots, f_{k\ell_k}(x, y)$ sont donnés par ceux des $y - \xi_{r_1}^k(x), \dots, y - \xi_{r_{m_r}}^k(x)$.

On obtient une telle famille \mathcal{F} à partir de celle définissant les A_i par récurrence, à l'aide du théorème de Tarski-Seidenberg, en saturant par les dérivées partielles successives et en composant avec des changement de coordonnées linéaires pour préparer les polynômes ([Boc-Cos-Roy], Proposition 9.1.2).

En utilisant les fonctions semi-algébriques $\xi_{r_s}^k$ racines et le fait que les A_r^k sont compatibles avec les valeurs critiques de $y \rightarrow f_{k,j}(x, y)$ et de leurs dérivées partielles successives suivant la variable y , le théorème des fonctions implicites analytiques assure la conclusion. \square

Le Théorème 3.5 montre qu'un ensemble semi-algébrique de \mathbb{R}^n est une réunion finie d'ensembles semi-algébriques qui sont des sous-variétés de \mathbb{R}^n qui sont \mathcal{C}^∞ et même \mathcal{C}^ω . Les ensembles semi-algébriques de \mathbb{R}^n qui sont des sous-variétés \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R}^n ont des propriétés particulières, on les appelle les variétés de Nash.

Définition. Une sous-variété \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R}^n qui est un sous-ensemble semi-algébrique de \mathbb{R}^n est appelée une *variété de Nash* de \mathbb{R}^n . Une application \mathcal{C}^∞ semi-algébrique $f : X \rightarrow Y$, avec X et Y des variétés de Nash est appelée une *application de Nash*.

Définition (Stratification). Une stratification \mathcal{C}^k , $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ (resp. de Nash, \mathcal{C}^k et définissable dans une structure o-minimale \mathcal{S}), d'un ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est une partition $(X_j)_{j \in J}$ de X en sous-variétés \mathcal{C}^k de \mathbb{R}^n (resp. de Nash, \mathcal{C}^k et définissable dans \mathcal{S}), localement finie (ie que tout compact de X rencontre un nombre finie de X_j). On appelle les X_j les *strates* de la stratification. On peut parfois demander que les strates soient connexes, ou vérifient la *condition de la frontière*, qui est :

$$\forall i, j \in J, X_i \cap \bar{X}_j \neq \emptyset \Rightarrow X_i \subset \bar{X}_j.$$

Des Théorèmes 3.4 et 3.5 on tire le corollaire :

Corollaire 3.6. *Étant donnée une structure o-minimale \mathcal{S} , tout ensemble définissable dans \mathcal{S} admet une stratification finie \mathcal{C}^k , définissable, avec des strates connexes, \mathcal{C}^k -difféomorphes à des pavés ouverts.*

Tout ensemble semi-algébrique de \mathbb{R}^n admet une stratification semi-algébrique \mathcal{C}^ω finie, avec des strates connexes, \mathcal{C}^ω -difféomorphes à des pavés ouverts.

Remarques sur les applications de Nash. Rappelons qu'une application de Nash $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est par définition une application \mathcal{C}^∞ et semi-algébrique, définie sur un ouvert U semi-algébrique de \mathbb{R}^n .

- Notons $\mathcal{N}_{\mathbb{R}^n, 0}$ l'anneau des germes des fonctions de Nash en 0 et $\mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]]$ l'anneau des séries entières formelles. Soit alors $\sigma : \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n, 0} \rightarrow \mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]]$ le morphisme qui à $f \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n, 0}$ associe sa série de Taylor en 0.

- *Le morphisme σ est injectif.* En effet si l'application $f \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n, 0}$ a sa série de Taylor nulle en 0, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $f(x)/\|x\|^k \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$ (*). Si f n'est pas l'application nulle, $g(r) = \sup\{|f(x)|; \|x\| \leq r\}$ est semi-algébrique et non nulle. D'après l'inégalité de Lojasiewicz, il existe $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que : $r^N \leq Cg(r)$. Ce qui implique que (*) ne peut avoir lieu et donc que $f \equiv 0$.

Soit $\mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]]_{alg}$ le sous-anneau de $\mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]]$ des séries algébriques sur $\mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]]$, ie des séries $s(X_1, \dots, X_n)$ vérifiant une équation du type :

$$P_d s^d + P_{d-1} s^{d-1} + \dots + P_0, \text{ avec } P_j \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n].$$

- Nous avons : $\sigma(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^n, 0}) \subset \mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]]_{alg}$. En effet, si f est un germe en 0 d'application de Nash, le graphe de f est semi-algébrique, et donc donné par des égalités et des inégalités portant sur des polynômes P_i . Alors le graphe de f coïncide au voisinage de 0 avec celui d'une application racine ξ associée à une sur-famille stratifiante de la famille (P_i) , comme définie dans la preuve du Théorème 3.5. De sorte que f vérifie une équation algébrique $Q(x, f(x)) = 0$; il en est alors de même de sa série de Taylor.

- *On montre enfin non trivialement que le morphisme $\sigma : \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n, 0} \rightarrow \mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]]_{alg}$ est surjectif* (cf [Bos-Cos-Roy], 8.1.4). On résume par : Le morphisme σ est un isomorphisme entre $\mathcal{N}_{\mathbb{R}^n, 0}$ et $\mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]]_{alg}$ (cf [Bos-Cos-Roy], 8.1.6).

• Notons $\mathcal{A}_{alg,0}$ l'anneau des germes en 0 d'applications analytiques et algébriques sur $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. Un germe d'application de $\mathcal{A}_{alg,0}$ est en particulier \mathcal{C}^∞ et semi-algébrique (son graphe est celui d'une application racine ξ , cf la preuve du Théorème 3.5), donc $\mathcal{A}_{alg,0} \subset \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n,0} \stackrel{\sigma}{\simeq} \mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]]_{alg}$. D'autre part on montre non trivialement (cf [Bos-Cos-Roy], 8.1.7) que toute série de $\mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]]_{alg}$ est celle d'une application de $\mathcal{A}_{alg,0}$. Il s'ensuit, par injectivité de σ , que $\mathcal{N}_{\mathbb{R}^n,0} = \mathcal{A}_{alg,0}$.

• On peut se demander en quoi une fonction semi-algébrique et $\mathcal{C}^k, k \geq 1$, $g : U \rightarrow \mathbb{R}$, avec $U \subset \mathbb{R}$ diffère d'une fonction de Nash. On peut avancer la réponse suivante ([Bos-Cos-Roy], 8.1.12) :

Soit $g :]0, \delta[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction semi-algébrique continue. Il existe alors $p \in \mathbb{N}^$, $\epsilon \in]0, \delta^{1/p}[$ et une fonction de Nash $f :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in]0, \epsilon[$, $f(x) = g(x^p)$.*

• On montre que contrairement à l'anneau des séries formelles, des séries convergentes ou l'anneau des fonctions semi-algébriques $\mathcal{C}^k, k \geq 1$ (†), l'anneau $\mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]]_{alg}$, et donc l'anneau $\mathcal{N}_{\mathbb{R}^n,0}$, est noethérien ([Bos-Cos-Roy], 8.2.11, [Ris]).

(†) Par exemple, l'anneau $\mathcal{S}\mathcal{A}_{\mathbb{R},0}^0$ des germes en 0 de fonctions semi-algébriques continues n'est pas noethérien. En effet, soit, pour $p \in \mathbb{N}^*$, le germe de fonction semi-algébrique $f_p(x) = x^{1/p}$, et son idéal I_p dans $\mathcal{S}\mathcal{A}_{\mathbb{R},0}^0$. La suite $I_1 \subset \dots \subset I_p \subset I_{p+1} \subset \dots \subset \mathcal{S}\mathcal{A}_{\mathbb{R},0}^0$ n'est pas stationnaire, car d'après le point précédent, $f_{p+1} \notin I_p$.

Chapitre 4. Dimension et caractéristique d'Euler-Poincaré



Dans ce chapitre nous abordons la question des invariants numériques que l'on peut attacher à un ensemble semi-algébrique ou définissable dans une structure o-minimale donnée. Nous considérons deux d'entre-eux : la dimension et la caractéristique d'Euler-Poincaré.

La dimension $d \in \mathbb{N}$ d'un ensemble définissable A généralise celle des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n , c'est-à-dire traduit l'impression visuelle donnée par l'ensemble que celui-ci possède des points au voisinage desquels il "ressemble" à un ouvert d'un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension d et ne possède pas de points au voisinage desquels il ressemble à un ouvert de \mathbb{R}^k , pour $k > d$. La dimension est l'invariant le plus simple que l'on puisse attacher à un ensemble définissable. Il s'agit d'un invariant topologique. Dans le cas des semi-algébriques, la dimension peut être définie de plusieurs façons : topologique, différentielle (via une décomposition cellulaire que l'on se donne) ou algébrique.

La caractéristique d'Euler-Poincaré quant à elle est un invariant topologique plus subtil que la dimension.

4.1. Vocabulaire de la géométrie algébrique. Nous commençons par rappeler le vocabulaire de base de la géométrie algébrique élémentaire.

Étant donnés $n \in \mathbb{N}^*$ et \mathcal{P} une partie quelconque de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, on note $\mathcal{Z}(\mathcal{P})$ le sous-ensemble suivant de \mathbb{R}^n :

$$\mathcal{Z}(\mathcal{P}) = \bigcap_{P \in \mathcal{P}} P^{-1}(\{0\}).$$

On dit que $\mathcal{Z}(\mathcal{P})$ est un *ensemble algébrique de \mathbb{R}^n (défini par \mathcal{P})*. On peut toujours supposer que \mathcal{P} est un idéal de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, quitte à considérer l'idéal (\mathcal{P}) engendré par \mathcal{P} plutôt que \mathcal{P} . En effet puisque (\mathcal{P}) est l'ensemble des polynômes $f = \sum_{i=1}^k a_i \cdot f_i$, $k \in \mathbb{N}^*$, $a_i \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, $f_i \in \mathcal{P}$, il est clair que $\mathcal{Z}(\mathcal{P}) = \mathcal{Z}((\mathcal{P}))$. D'autre part $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ étant noethérien, il existe un nombre fini de polynômes $P_1, \dots, P_r \in \mathcal{P}$ tels que $(P_1, \dots, P_r) = (\mathcal{P})$, il s'ensuit que :

$$\mathcal{Z}(\mathcal{P}) = \mathcal{Z}((\mathcal{P})) = \mathcal{Z}(\{P_1, \dots, P_r\}).$$

Remarque. Dans le cas réel, on peut toujours se ramener à $r = 1$, en remarquant que si $P = \sum_{i=1}^r P_i^2$, $\mathcal{Z}(\{P\}) = \mathcal{Z}(\mathcal{P})$.

Une intersection quelconque d'ensembles algébriques de \mathbb{R}^n est un ensemble algébrique de \mathbb{R}^n tandis qu'une réunion finie d'ensembles algébriques de \mathbb{R}^n est un ensemble algébrique de \mathbb{R}^n . De plus \emptyset et \mathbb{R}^n sont des ensembles algébriques de \mathbb{R}^n (prendre respectivement $\mathcal{P} = \{1\}$, ie $(\mathcal{P}) = \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ et $\mathcal{P} = \{0\}$). Ceci montre que les ensembles algébriques de \mathbb{R}^n sont les fermés d'une topologie sur \mathbb{R}^n , appelée *la topologie de Zariski de \mathbb{R}^n* . Remarquons que les fermés de la topologie de Zariski sont aussi des fermés de la topologie euclidienne de \mathbb{R}^n . Soit E un sous-ensemble de \mathbb{R}^n , \overline{E}^{Zar} , sa clôture dans \mathbb{R}^n relativement à la topologie de Zariski, est par définition le plus petit fermé de \mathbb{R}^n contenant E , ie le plus petit ensemble algébrique de \mathbb{R}^n contenant E .

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble algébrique, on note :

$$\mathcal{I}(A) = \{f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]; \forall x \in A, f(x) = 0\}.$$

Il s'agit d'un idéal de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, appelé l'idéal de A . Cet idéal est le noyau du morphisme d'anneaux (et même d'algèbres) suivant, où \mathbb{R}^A est l'anneau des fonctions de A dans \mathbb{R} :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] & \rightarrow & \mathbb{R}^A \\ f & \mapsto & f|_A \end{array}$$

de sorte que $\Gamma(A) := \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}(A)$ est (isomorphe à) l'ensemble des fonctions polynomiales sur A . L'ensemble $\Gamma(A)$ est même une \mathbb{R} -algèbre de type fini, appelée *l'algèbre affine de A* .

Remarque. L'application :

$$\mathcal{I} : \{ \text{ensembles algébriques de } \mathbb{R}^n \} \rightarrow \{ \text{idéaux de } \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \}$$

est une injection, car quel que soit l'ensemble algébrique A , $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(A)) = A$. Il est en effet clair que $A \subset \mathcal{Z}(\mathcal{I}(A))$ et si $A = \mathcal{Z}(\mathcal{P})$, on a $\mathcal{P} \subset \mathcal{I}(\mathcal{Z}(\mathcal{P}))$ et puisque \mathcal{Z} est décroissante $A = \mathcal{Z}(\mathcal{P}) \supset \mathcal{Z}(\mathcal{I}(\mathcal{Z}(\mathcal{P}))) = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(A))$.

En revanche l'application \mathcal{I} n'est pas surjective, par exemple si $n = 1$ et si A est un ensemble algébrique de \mathbb{R} tel que $\mathcal{I}(A) = (X^2)$, on a : $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(A)) = \mathcal{Z}(X^2) = \{0\} = A$. Mais alors $\mathcal{I}(A) = (X) \neq (X^2)$.

Si I est un idéal de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, on a toujours $I \subset \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$, mais on n'a pas en général d'égalité, comme le montre l'exemple ci-dessus, où $n = 1$ et $I = (X^2)$. L'image de \mathcal{I} est donnée par le théorème des zéros de Hilbert, ou *Nullstellensatz* :

Théorème 4.1 (Nullstellensatz). *Soit k un corps et I un idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$, alors*

- *Si k est algébriquement clos :*

$$\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) = \sqrt{I} := \{P \in k[X_1, \dots, X_n]; \exists r \in \mathbb{N} P^r \in I\}.$$

En particulier si $I \neq k[X_1, \dots, X_n]$, $\mathcal{Z}(I)$ n'est jamais vide.

-Si $k = \mathbb{R}$:

$$\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) = \{P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]; \exists r \in \mathbb{N}, Q_1, \dots, Q_\ell \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n], \\ P^{2r} + Q_1^2 + \dots + Q_\ell^2 \in I\}.$$

Preuve. On renvoie à [Boc-Cos-Roy], 4.1.4 pour $k = \mathbb{R}$ et on donne la preuve suivante dans la cas algébriquement clos.

Soit I un idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$ et k algébriquement clos. Commençons par montrer le second énoncé : si $\mathcal{Z}(I)$ est vide nécessairement $I = k[X_1, \dots, X_n]$ (Nullstellensatz faible).

L'idéal I est engendré par les polynômes P_1, \dots, P_m , puisque $k[X_1, \dots, X_n]$ est noëthérien. Si le système $\{P_i = 0\}$ est sans solution, comme cette condition est du premier ordre dans le langage des corps algébriquement clos, qui est avec élimination des quantificateurs, cette condition équivaut à une formule équivalente sur les seuls coefficients des P_i . Ce système ne possède alors pas de solution dans tout autre corps algébriquement clos contenant k . Or comme tout corps contenant k peut être plongé dans un corps algébriquement clos, le système $\{P_i = 0\}$ est sans solution dans tout corps contenant k . Si $I \neq k[X_1, \dots, X_n]$, on peut supposer que I est un idéal maximal, car tout idéal strict d'un anneau est contenu dans un idéal maximal. Le corps $K = k[X_1, \dots, X_n]/I$ contient k , et $(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n) \in K^n$ est alors une solution du système $\{P_i = 0\}$, ce qui est contradictoire.

Montrons maintenant que le Nullstellensatz faible implique le Nullstellensatz tel qu'énoncé. Soit $P \in \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$ et l'anneau $\mathcal{A} = k[X_1, \dots, X_n, T]/(1 - PT)$ qui s'identifie au sous-anneau des fractions rationnelles de $k[X_1, \dots, X_n]$ dont le dénominateur est une puissance de P . Comme montrer le Nullstellensatz revient à montrer qu'existent $Q_1, \dots, Q_m \in k[X_1, \dots, X_n]$ et $r \in \mathbb{N}$ tels que $1 = \sum_{i=1}^m \frac{P_i Q_i}{P^r}$, il est équivalent de prouver que $I\mathcal{A} = (1)$, ie qu'il existe une écriture $1 = \sum_{i=1}^m P_i Q_i + R(1 - PT)$, avec $Q_1, \dots, Q_m, R \in k[X_1, \dots, X_n, T]$. Notons J l'idéal $(P_1, \dots, P_m, (1 - PT))$ de $k[X_1, \dots, X_n, T]$. On a alors $\mathcal{Z}(J) = \emptyset$, puisque si $(a_1, \dots, a_n, b) \in k^{n+1}$ annule P_1, \dots, P_m et $1 - PT$, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{Z}(I)$ et donc (a_1, \dots, a_n) annule $P \in \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$. Par suite (a_1, \dots, a_n, b) ne peut annuler $1 - PT$. Par le Nullstellensatz faible, on a bien $J = k[X_1, \dots, X_n, T]$. \square

Conséquence pour l'image de \mathcal{I} . Pour I un idéal de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, notons $Rad_{\mathbb{R}}(I) = \{P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]; \exists r \in \mathbb{N}, Q_1, \dots, Q_\ell \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n], P^{2r} + Q_1^2 + \dots + Q_\ell^2 \in I\}$. L'image de l'application \mathcal{I} est $\{Rad_{\mathbb{R}}(I); I \text{ idéal de } \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]\}$. En effet, si I est un idéal dans l'image de \mathcal{I} , il existe un idéal J tel que $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(J)) = I$, donc $I = Rad_{\mathbb{R}}(J)$. Réciproquement si I est tel que qu'existe un idéal J pour lequel

$I = \text{Rad}_{\mathbb{R}}(J)$, on a $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(J)) = I$. On en conclut que

$$\mathcal{I} : \{ \text{ensembles algébriques} \} \rightarrow \{ \text{Rad}_{\mathbb{R}}(I); I \text{ idéal de } \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \}$$

est une bijection d'application réciproque \mathcal{Z} .

On dit qu'un sous-ensemble A de \mathbb{R}^n est *irréductible* ssi $A = A_1 \cup A_2$, avec A_1, A_2 ensembles algébriques implique que $A_1 = A$ ou $A_2 = A$ (†). Lorsque A est un ensemble algébrique, A irréductible signifie que $\mathcal{I}(A)$ est premier (‡) ce qui équivaut encore à dire que $\Gamma(A)$ est un anneau intègre, et on note $\mathcal{K}(A)$ le corps des fractions de $\Gamma(A)$. Un élément de $\mathcal{K}(A)$ s'identifie donc à f/g , avec f, g restrictions de fonctions polynômes sur A et g non identiquement nulle sur A .

Rappel. Un idéal I d'un anneau A est dit premier ssi A/I est intègre ie $A/I \neq \{0\}$ et $\forall a, b \in A, ab = 0$ implique $a = 0$ ou $b = 0$ ssi $I \neq A$ et $\forall \alpha, \beta \in A, \alpha\beta \in I$ implique $\alpha \in I$ ou $\beta \in I$.

Une belle conséquence du caractère noethérien de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ est le théorème suivant, qui sera utile pour définir la dimension algébrique d'un ensemble algébrique ou semi-algébrique :

Théorème 4.2 (Décomposition en composantes irréductibles). Soit A un ensemble algébrique de \mathbb{R}^n . Il existe A_1, \dots, A_ℓ des ensembles algébriques irréductibles de \mathbb{R}^n , uniques à permutation près des indices tels que : $A_i \not\subset A_j$, pour $i \neq j$, et $A = A_1 \cup \dots \cup A_\ell$. On appelle les ensembles algébriques A_1, \dots, A_ℓ les composantes irréductibles de A .

Preuve. Supposons que l'ensemble \mathcal{N} des ensembles algébriques de \mathbb{R}^n non décomposables soit non vide et soit l'un deux, A , dont l'idéal $\mathcal{I}(A)$ soit maximal pour

(†) La définition de l'irréductibilité est valable dans un espace topologique quelconque, en remplaçant "ensemble algébrique" par "fermé". Nous définissons donc ici l'irréductibilité au sens de la topologie de Zariski. Notons que si l'espace topologique X est séparé, les seules parties irréductibles de X sont les points. En effet si F est un fermé contenant au moins deux points $x \neq y$, il existe un ouvert U_x contenant x et un ouvert U_y contenant y tels que $U_x \cap U_y = \emptyset$. Le fermé $F_y = F \cap X \setminus U_x$ contient y et non x tandis que le fermé $F_x = F \cap X \setminus U_y$ contient alors x et non y ; ils sont tous deux distincts de F . Comme de plus : $F = F_x \cup F_y$, F n'est pas irréductible.

(‡) Soit $A \in \mathbb{R}^n$ irréductible et $fg \in \mathcal{I}(A)$ tels que $f|_A \neq 0, g|_A \neq 0$. En posant $A_f = \mathcal{Z}(f) \cap A \subset A$ et $A_g = \mathcal{Z}(g) \cap A \subset A$, les inclusions étant strictes on obtient A comme réunion de deux fermés stricts de A , ce qui est contradictoire. En conséquence $f \in \mathcal{I}(A)$ ou $g \in \mathcal{I}(A)$ et ainsi $\mathcal{I}(A)$ est premier. Réciproquement si $A = A_1 \cup A_2$ avec $A_1 \subset A$ et $A_2 \subset A$ des inclusions strictes, comme \mathcal{I} est injective, les inclusions $\mathcal{I}(A) \subset \mathcal{I}(A_1)$ et $\mathcal{I}(A) \subset \mathcal{I}(A_2)$ sont strictes. Soit alors $f \in \mathcal{I}(A_1) \setminus \mathcal{I}(A)$ et $g \in \mathcal{I}(A_2) \setminus \mathcal{I}(A)$. Alors $fg \in \mathcal{I}(A_1) \cap \mathcal{I}(A_2) = \mathcal{I}(A)$, donc $\mathcal{I}(A)$ n'est pas premier.

l'inclusion dans l'ensemble $\{\mathcal{I}(A); A \in \mathcal{N}\}$. Un tel A existe car $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ est noëthérien. Puisque A n'est pas décomposable, en particulier A n'est pas irréductible, il existe alors F, G deux ensembles algébriques, tels que $A = F \cup G$ et $F, G \neq A$. L'application \mathcal{I} étant injective, on a les inclusions strictes : $\mathcal{I}(A) \subset \mathcal{I}(F)$, $\mathcal{I}(A) \subset \mathcal{I}(G)$. Mais alors, $\mathcal{I}(A)$ étant maximal pour l'inclusion, F et G sont nécessairement décomposables, et par conséquent A aussi, ce qui est contradictoire. Enfin si $A = A_1 \cup \dots \cup A_\ell$ et $A = A'_1 \cup \dots \cup A'_k$ sont deux écritures, on a pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$, $A_i = (A_i \cap A'_1) \cup \dots \cup (A_i \cap A'_k)$. Par irréductibilité de A_i , il existe $j \in \{1, \dots, k\}$ tel que $A_i = A_i \cap A_j$, ie $A_i \subset A_j$. Par symétrie des arguments, on a $A_i = A_j$ et $\ell = k$. \square

4.2. Dimensions des ensembles algébriques et semi-algébriques. Le vocabulaire nécessaire pour comparer les différentes notions de dimension associées à un ensemble semi-algébrique est maintenant introduit.

Définition (Dimension de Krull d'un anneau). Soit Γ un anneau. La dimension de Krull de A , notée $\dim_K(\Gamma)$ est définie comme :

$$\dim_K(\Gamma) = \sup\{d \in \mathbb{N}; I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_d \subset \Gamma$$

$$\text{ou } I_i \neq I_j \text{ pour } i \neq j \text{ et } I_i \text{ idéal premier de } \Gamma\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Définition (Dimension algébrique d'un ensemble algébrique ou semi-algébrique). Soit A un ensemble algébrique de \mathbb{R}^n . La *dimension algébrique* de A , notée $\dim_{alg}(A)$, est définie comme la dimension de Krull de l'anneau $\Gamma(A)$:

$$\dim_{alg}(A) := \dim_K(\Gamma(A)).$$

Si A est un ensemble semi-algébrique, on définit sa dimension algébrique comme la dimension algébrique de sa clôture de Zariski, ie du plus petit ensemble algébrique qui le contient :

$$\dim_{alg}(A) := \dim_{alg}(\overline{A}^{Zar}) := \dim_K(\Gamma(\overline{A}^{Zar})).$$

Remarque. On peut définir $\mathcal{I}(A) \subset \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, lorsque A est un semi-algébrique de \mathbb{R}^n , de la même manière que lorsque A est un ensemble algébrique, par $\mathcal{I}(A) = \{P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]; \forall x \in A, P(x) = 0\}$. On a alors $\mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(\overline{A}^{Zar})$, car si $P|_A = 0$, $\overline{A}^{Zar} \subset P^{-1}(0)$, et donc $P|_{\overline{A}^{Zar}} = 0$, ie $P \in \mathcal{I}(\overline{A}^{Zar})$. Il s'ensuit que $\Gamma(A) = \Gamma(\overline{A}^{Zar})$, donc $\dim_{alg}(\Gamma(A)) = \dim_{alg}(\Gamma(\overline{A}^{Zar}))$. On peut ainsi définir la dimension algébrique d'un semi-algébrique par $\dim_K(\Gamma(A))$ aussi bien que par $\dim_K(\Gamma(\overline{A}^{Zar}))$.

Proposition 4.3. (i)- Si $A, B \subset \mathbb{R}^n$ sont deux ensembles algébriques tels que $B \subset A$, on a : $\dim_{alg}(B) \leq \dim_{alg}(A)$. Si de plus A est irréductible et si $B \neq A$, $\dim_{alg}(B) < \dim_{alg}(A)$.

(ii)- Si $A = A_1 \cup \dots \cup A_\ell$ est un ensemble algébrique réunion des ensembles algébriques A_1, \dots, A_ℓ , on a : $\dim_{alg}(A) = \max_{i=1, \dots, \ell} \dim_{alg}(A_i)$.

Preuve. (i)- Les idéaux de $\Gamma(B)$ sont en bijection croissante par la projection canonique sur le quotient $\Gamma(B) = \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}(B)$ avec les idéaux de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ qui contiennent $\mathcal{I}(B)$ et dans cette bijection les idéaux premiers se correspondent. Ainsi une chaîne stricte $J_0 \subset \dots \subset J_d$ d'idéaux premiers de $\Gamma(B)$ donne lieu à la chaîne stricte d'idéaux premiers de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$: $J'_0 \subset \dots \subset J'_d$ contenant $\mathcal{I}(B)$. Comme $\mathcal{I}(A) \subset \mathcal{I}(B)$, en projetant la chaîne $J'_0 \subset \dots \subset J'_d$ sur le quotient $\Gamma(A)$, on obtient une chaîne $J''_0 \subset \dots \subset J''_d$ stricte d'idéaux premiers de $\Gamma(A)$, ce qui prouve que $\dim_{alg}(B) \leq \dim_{alg}(A)$. Si A est irréductible, $\mathcal{I}(A)$ est premier. À toute chaîne stricte $J_0 \subset \dots \subset J_d$ d'idéaux premiers de $\Gamma(B)$, on associe la chaîne stricte $J'_0 \subset \dots \subset J'_d$ d'idéaux premiers de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ contenant $\mathcal{I}(B)$. Comme \mathcal{I} est injective et que l'inclusion $B \subset A$ est stricte, la chaîne d'idéaux premiers $\mathcal{I}(A) \subset J'_0 \subset \dots \subset J'_d$ est stricte. Elle donne alors lieu à une chaîne stricte de $\Gamma(A)$ de longueur $d + 1$. On a donc bien $\dim_{alg}(B) < \dim_{alg}(A)$.

Prouvons (ii) On a d'abord $\dim_{alg}(A) \geq \max_{i=1, \dots, \ell} \dim_{alg}(A_i)$, par (i). Soit maintenant $d = \max_{i=1, \dots, \ell} \dim_{alg}(A_i)$ et $I_0 \subset \dots \subset I_{d+1}$ une chaîne stricte d'idéaux premiers de $\Gamma(A)$. On en déduit une chaîne stricte $I'_0 \subset \dots \subset I'_{d+1}$ d'idéaux premiers de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ contenant $\mathcal{I}(A)$. Montrons que $\mathcal{I}(A_i) \subset I'_0$, pour un certain i (*). On aura alors que la chaîne stricte $I'_0 \subset \dots \subset I'_{d+1}$ d'idéaux premiers de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ contient $\mathcal{I}(A_i)$, ce qui induira par projection sur $\Gamma(A_i)$ une chaîne stricte d'idéaux premiers de $\Gamma(A_i)$ de longueur $> d$, ce qui est contradictoire. Pour montrer (*) il suffit de remarquer que : $\mathcal{I}(A_1) \dots \mathcal{I}(A_\ell) \subset \bigcap_{i=1}^{\ell} \mathcal{I}(A_i) = \mathcal{I}(A) \subset I'_0$. L'idéal I'_0 étant premier, il contient un des facteurs du produit $\mathcal{I}(A_1) \dots \mathcal{I}(A_\ell)$. \square

Si A est un ensemble algébrique irréductible, on note $\partial_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}(A))$ le degré de transcendance du corps $\mathcal{K}(A)$ sur \mathbb{R} (†). En particulier si $d = \partial_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}(A))$, $\mathcal{K}(A)$ est une extension algébrique d'un corps de fractions $\mathbb{R}(Y_1, \dots, Y_d)$. Le lien entre $\partial_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}(A))$

(†) **Base de transcendance.** $R \subset K$ étant une extension de corps, on dit qu'une famille \mathcal{F} d'éléments de K est algébriquement libre sur R , si pour toute sous-famille finie (k_1, \dots, k_d) de \mathcal{F} , pour tout $P \in R[X_1, \dots, X_d]$, $P(k_1, \dots, k_d) = 0 \Rightarrow P = 0$.

Soit $R(\mathcal{F})$ le sous-corps de K engendré par \mathcal{F} . On a : $R \subset R(\mathcal{F}) \subset K$. On dit que \mathcal{F} est algébriquement génératrice sur R , si K est algébrique sur $R(\mathcal{F})$. La famille \mathcal{F} est une base de transcendance de K sur R lorsqu'elle est algébriquement libre et génératrice. On montre à l'aide du lemme de Zorn que pour toute extension $R \subset K$ existe des bases de transcendance et que celles-ci ont toutes même cardinal, on l'appelle le degré de transcendance de K sur R , et on le note $\partial_R(K)$. Cette définition généralise le fait que $\partial_R(R(X_1, \dots, X_d)) = d$ et que (X_1, \dots, X_d) est une base de transcendance de $R(X_1, \dots, X_d)$ sur R , puisque si (k_1, \dots, k_d) est algébriquement libre, $R(k_1, \dots, k_d)$ est isomorphe au corps des fractions $R(Y_1, \dots, Y_d)$. Enfin on peut compléter des familles

et $\dim_{alg}(A)$ est donné par :

Théorème 4.4. *Soit Γ une \mathbb{R} -algèbre intègre de type fini et \mathcal{K} son corps des fractions. Alors : $\dim_{\mathcal{K}}(\Gamma) = \partial_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$. En particulier, si A est un ensemble algébrique irréductible, $\dim_{alg}(A) = \partial_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}(A))$.*

Preuve.

Corollaire 4.5. *Si A est un ensemble algébrique de \mathbb{R}^n , $\dim_{alg}(A) \leq n$.*

Preuve. On a $\dim_{alg}(\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]) = \partial_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]) = n$, car (X_1, \dots, X_n) est une base de transcendance de $\mathbb{R}(X_1, \dots, X_n)$. On applique ensuite la Proposition 4.3.(i). \square

Corollaire 4.6. *Si A est un ensemble algébrique de \mathbb{R}^n , dont les composantes irréductibles sont A_1, \dots, A_ℓ , on a la définition alternative suivante de la dimension de A : $\dim_{alg}(A) = \max_{i=1, \dots, \ell} \partial_{\mathbb{R}}(A_i)$.*

Preuve. Par le Théorème 4.4 et la Proposition 4.3.(ii). \square

Une définition plus géométrique de la dimension d'un ensemble semi-algébrique ou même définissable dans une structure o-minimale sur les réels, découle du théorème de décomposition cellulaire (\mathcal{C}^k ou \mathcal{C}^0). Si $A \in \mathcal{SA}(n)$, soit D_1, \dots, D_k une décomposition cellulaire de A . Chaque cellule D_i est homéomorphe à un pavé ouvert P_i de \mathbb{R}^{d_i} . L'entier d_i est univoquement attaché à D_i , car un ouvert de \mathbb{R}^{d_i} ne peut être homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^{d_j} , pour $d_i \neq d_j$ (ceci est non trivial pour les homéomorphismes, plus facile pour les difféomorphismes, car leur différentielle est une application linéaire inversible entre \mathbb{R}^{d_i} et \mathbb{R}^{d_j} , ce qui n'est possible que si $d_i = d_j$). On définit alors la dimension topologique de A , et on la note $\dim_{top}(A)$, par :

$$\dim_{top}(A) := \max_{i=1, \dots, k} d_i.$$

Cependant cette égalité est une définition que lorsqu'on s'est assuré de son indépendance relativement au choix de la décomposition cellulaire D_1, \dots, D_k . Ceci est possible parce qu'à deux décompositions cellulaires on peut associer une troisième adaptée aux deux premières et qu'une variété différentielle de dimension d ne peut être réunion finie de variétés différentielles que si ces dernières sont de dimension d .

Mais en montrant, comme nous allons le faire, que pour A un ensemble semi-algébrique de \mathbb{R}^n , $\dim_{alg}(A) = \max_{i=1, \dots, k} d_i$, pour D_1, \dots, D_k une décomposition cellulaire de A , on montre aussi l'indépendance de $\dim_{top}(A)$ relativement au choix de la décomposition cellulaire D_1, \dots, D_k .

Théorème 4.7. *Soit A un ensemble semi-algébrique de \mathbb{R}^n . On a : $\dim_{alg}(A) = \dim_{top}(A)$*

algébriquement libres en base de transcendance et extraire des base de transcendance de familles algébriquement génératrices

Preuve. Si $A = D_1 \cup \dots \cup D_k$ est une décomposiion cellulaire de A , on a : $\bar{A}^{Zar} = \bar{D}_1^{Zar} \cup \dots \cup \bar{D}_k^{Zar}$ ($\bar{D}_1^{Zar} \cup \dots \cup \bar{D}_k^{Zar}$ étant un fermé qui contient A , on a $\bar{A}^{Zar} \subset \bar{D}_1^{Zar} \cup \dots \cup \bar{D}_k^{Zar}$ et comme \bar{A}^{Zar} est un fermé qui contient chaque D_i , $\bar{D}_i^{Zar} \subset \bar{A}^{Zar}$). D'après la définition de la dimension topologique et la Proposition 4.3.(ii), il suffit de prouver le théorème pour $A = D$ une cellule semi-algébrique de \mathbb{R}^n . La preuve se fait par récurrence sur n .

- Si $n = 1$, D est un point ou un intervalle, et donc \bar{D}^{Zar} est respectivement un point ou \mathbb{R} . Dans le premier cas $\Gamma(\bar{D}^{Zar}) = \mathbb{R}$, qui admet pour unique chaîne stricte d'idéaux premiers : $I_0 = (0)$, soit $\dim_{alg}(D) = 0$. Dans le second cas $\Gamma(\mathbb{R}) = \mathbb{R}[X]/(0) = \mathbb{R}[X]$, qui admet la chaîne stricte maximale d'idéaux premiers $I_0 = (0) \subset I_1 = (X)$, soit $\dim_{alg}(D) = 1$. ($\mathbb{R}[X]$ est principal et ses idéaux premiers sont engendrés par les polynômes irréductibles. On peut aussi utiliser $\dim_{alg}(\mathbb{R}[X]) = \partial_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}(X)) = 1$).

- Soit $n \geq 1$ et supposons que $\dim_{top}(D) = \dim_{alg}(D)$, pour toute cellule semi-algébrique D de \mathbb{R}^n et soit C une cellule semi-algébrique de \mathbb{R}^{n+1} . La cellule C est définie par une cellule $D \subset \mathbb{R}^n$. La cellule D est homéomorphe à un pavé ouvert de \mathbb{R}^d , et donc par hypothèse de récurrence, $\dim_{alg}(D) = d$. Deux cas se présentent alors :

- La cellule C est un graphe de fonction semi-algébrique continue $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dans ce cas $\dim_{top}(D) = d$. Comme $\Gamma(f)$ est semi-algébrique, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que P est $\forall x \in D$, $P(x, X_{n+1})$ est non nul et $P(x, f(x)) = 0$. Si $\bar{D}^{Zar} = A_1 \cup \dots \cup A_\ell$ est la décomposition de \bar{D}^{Zar} en composantes irréductibles, on a :

$$\bar{C}^{Zar} \subset \mathcal{Z}(P) \cap (\bar{D}^{Zar} \times \mathbb{R}) = \mathcal{Z}(P) \cap ((A_1 \times \mathbb{R}) \cup \dots \cup (A_\ell \times \mathbb{R})).$$

Comme A_i est irréductible, $A_i \times \mathbb{R}$ aussi et on a facilement $\dim_{alg}(A_i \times \mathbb{R}) = \dim_{alg}(A_i) + 1$. Notons que $\mathcal{Z}(P) \cap (A_i \times \mathbb{R}) \subset A_i \times \mathbb{R}$, pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$, est une inclusion stricte, car $\forall x \in D$, $P(x, X_{n+1})$ est non nul. D'après la Proposition 4.3, on a :

$$\begin{aligned} \dim_{alg}(C) &= \dim_{alg}(\bar{C}^{Zar}) \leq \dim_{alg}(\mathcal{Z}(P) \cap (\bar{D}^{Zar} \times \mathbb{R})) \\ &= \max_{i=1, \dots, \ell} \dim_{alg}(\mathcal{Z}(P) \cap (A_i \times \mathbb{R})) < \max_{i=1, \dots, \ell} (\dim_{alg}(A_i) + 1) = d + 1. \end{aligned}$$

Donc : $\dim_{alg}(C) \leq d$.

Montrons pour finir que $\dim_{alg}(C) \geq d$. Soit A une composante irréductible de \bar{C}^{Zar} et B sa projection sur \mathbb{R}^n . La projection $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ induit un morphisme injectif de $\pi^* : \Gamma(B) = \Gamma(\bar{B}^{Zar}) \rightarrow \Gamma(A)$ de la façon suivante : $\pi^*(f|_B) = f \circ \pi|_A$. Alors si \bar{B}^{Zar} est irréductible, ce monorphisme donne lieu à un morphisme $\mathcal{K}(\bar{B}^{Zar}) \rightarrow \mathcal{K}(A)$, ce qui prouve que $\dim_{alg}(\bar{B}^{Zar}) \leq \dim_{alg}(A)$, par le Théorème 4.4. Toujours en supposant que \bar{B}^{Zar} est irréductible, puisque D est réunion des images par π des composantes irréductibles de A , \bar{D}^{Zar} est réunion des \bar{B}^{Zar} , et à nouveau par la Proposition 4.3, $d = \dim_{alg}(D) \leq \dim_{alg}(C)$.

Il reste ainsi à prouver que \bar{B}^{Zar} est irréductible. Pour cela soient F_1, F_2 deux ensembles algébriques de \mathbb{R}^n tels que $\bar{B}^{Zar} = F_1 \cup F_2$. Or $A \subset \pi^{-1}(F_1) \cup \pi^{-1}(F_2)$. Comme A est irréductible et $\pi^{-1}(F_1), \pi^{-1}(F_2)$ sont des ensembles algébriques, on a

$A \subset \pi^{-1}(F_1)$ ou $A \subset \pi^{-1}(F_2)$, soit $B \subset F_1$ ou $B \subset F_2$, ce qui finalement donne : $\bar{B}^{Zar} \subset F_1$ ou $\bar{B}^{Zar} \subset F_2$.

- La cellule C est la partie comprise entre les graphes de deux fonctions $f < g$ au-dessus de D . Alors $\bar{C}^{Zar} = \bar{D}^{Zar} \times \mathbb{R}$ (car $(D \times \mathbb{R} \subset \bar{C}^{Zar}) \Rightarrow (\bar{D}^{Zar} \times \mathbb{R} \subset \bar{C}^{Zar})$, l'autre inclusion étant immédiate). \square

La propriété la plus importante des ensembles semi-algébriques ou définissables dans une structure o-minimale, relativement à la dimension, est la suivante :

Théorème 4.8. *Soit A un ensemble définissable dans une structure o-minimale sur les réels. On a : $\dim(A) = \dim(\bar{A})$ et $\dim(\bar{A} \setminus A) < \dim(A)$.*

Preuve. Voir Théorème 1.8 Chapitre 4 de [Dri] pour les ensembles définissables et Proposition 3.16 de [Cos2] pour les ensembles algébriques .

Remarque. Le Théorème 4.8. n'est bien sûr vrai que pour les ensembles définissables. Il suffit de songer au graphe A de $x \mapsto \sin(1/x)$ sur $]0, 1[$. Sa dimension en tant que sous-variété de \mathbb{R}^2 est 1, mais $\dim(\bar{A} \setminus A) = 1$.

Remarque. La dimension des ensembles définissables est un invariant des bijections définissables, car si $f : X \rightarrow Y$ est bijective, en prenant une cellule C de X sur laquelle f est \mathcal{C}^1 , $x \in C$ et $f(x) \in D$, avec D une cellule \mathcal{C}^1 de Y , l'application tangent de f étant un isomorphisme, on obtient que $\dim(D) \geq \dim(C)$, soit $\dim(Y) \geq \dim(X)$. Par symétrie de l'argument on obtient l'égalité.

4.3. Caractéristique d'Euler-Poincaré des ensembles définissables. Nous définissons dans cette section un second invariant attaché à un ensemble définissable, la caractéristique d'Euler-poincaré. Il s'agit, comme la dimension, d'un invariant des bijections définissables : deux ensembles définissables en bijection définissable ont même caractéristique d'Euler-poincaré. On utilise en général cette propriété pour prouver que deux ensembles définissables ne sont pas en bijection définissable. Par exemple la caractéristique d'Euler-poincaré de S^2 est 2 tandis que celle du tore est 0 : la sphère et le tore ne sont pas en bijection définissable.

Remarque. Nous définissons la caractéristique d'Euler-Poincaré à partir d'une décomposition cellulaire, c'est-à-dire que nous définissons ce qu'en topologie algébrique on appelle la *caractéristique d'Euler-Poincaré à support compact*. L'avantage de celle-ci est qu'elle est additive sur tous les définissables et pas seulement sur les définissables compacts, comme la caractéristique d'Euler-Poincaré traditionnelle. En revanche on perd l'invariance par homotopie : \mathbb{R}^n et un point ont même type d'homotopie, tandis que leur caractéristique d'Euler-Poincaré (à support compact) est respectivement $(-1)^n$ et 0. Cependant pour les calculs que nous aurons à faire ici, essentiellement basés sur l'additivité, la caractéristique à support compact s'avère plus indiquée. Dans la suite nous parlerons simplement de caractéristique d'Euler-Poincaré sans indiquer qu'il s'agit de la

caractéristique d'Euler-Poincaré à support compact.

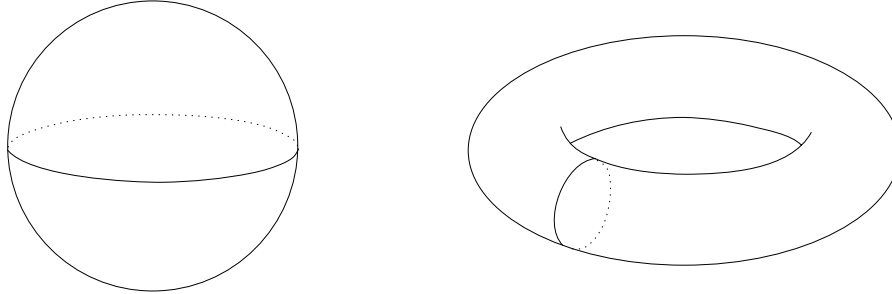


fig.9

Soit C une cellule définissable de \mathbb{R}^n . Cette cellule est difféomorphe à un pavé ouvert de \mathbb{R}^d , il s'agit par conséquent d'une variété différentielle de dimension d . On dit que d est la dimension de la cellule C . On note :

$$\chi(C) := (-1)^d,$$

la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de la cellule C .

Si A est un ensemble définissable dans une structure o-minimale \mathcal{S} , $\mathcal{D} = (D_1, \dots, D_k)$ une décomposition cellulaire \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) de A , on définit la dimension de A comme pour les ensembles de la catégorie semi-algébrique, par $\dim(A) := \max\{\dim(D_i), i = 1, \dots, k\}$. On montre que cette définition ne dépend pas du choix de la décomposition \mathcal{D} de A (car deux décompositions cellulaires admettent une troisième décomposition cellulaire qui leur est adaptée, et une cellule d -dimensionnelle ne peut être réunion de cellules de dimension $< d$ ou contenir une cellule de dimension $> d$) et est invariant par bijection définissable. Si le nombre de cellules de \mathcal{D} de dimension d est n_d , $d = 0, \dots, \dim(A)$, on note :

$$\chi_{\mathcal{D}}(A) := \sum_{i=1}^k \chi(D_i) = \sum_{i=1}^k (-1)^{\dim(D_i)} = \sum_{d=0}^{\dim(A)} (-1)^d n_d \in \mathbb{Z}.$$

L'entier $\chi_{\mathcal{D}}(A)$ est, comme la dimension, visiblement défini relativement à une décomposition \mathcal{D} de A . On montre ci-dessous qu'en réalité $\chi_{\mathcal{D}}(A)$ est, comme la dimension, indépendant du choix de la décomposition cellulaire \mathcal{D} . Si \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont deux décompositions cellulaires de A , alors $\chi_{\mathcal{D}_1}(A) = \chi_{\mathcal{D}_2}(A)$. Cette propriété conduit à la définition de la caractéristique d'Euler-Poincaré, définie par $\chi(A) := \chi_{\mathcal{D}}(A)$, quelle que soit la décomposition cellulaire \mathcal{D} de A .

À ce stade $\chi(A)$ apparaît comme attaché à la façon dont on “voit A dans \mathbb{R}^n ”, ie ne porte pas sur A à isométrie linéaire, homéomorphisme définissable etc... près, mais sur le couple (A, \mathbb{R}^n) lié par l'inclusion $A \subset \mathbb{R}^n$. En effet, $\chi(A)$ est défini par la donnée d'une décomposition cellulaire de A et celle-ci est construite par récurrence sur l'ordre croissant des composantes des éléments de \mathbb{R}^n . Il est essentiel de s'affranchir de cette dépendance, car par exemple dans le cas où $H \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-espace affine de \mathbb{R}^n contenant A , on veut pouvoir calculer $\chi(A)$ en voyant A comme sous-ensemble définissable de \mathbb{R}^n aussi bien que comme un sous-ensemble définissable de $H \simeq \mathbb{R}^k$, $k < n$, indépendamment de la manière dont on identifie H et \mathbb{R}^k . Ceci revient à démontrer l'indépendance de $\chi_{\mathcal{D}}(A)$ relativement à tout choix d'ordre sur les composantes de \mathbb{R}^n grâce auquel la décomposition cellulaire \mathcal{D} est construite.

D'autre part démontrer l'invariance de $\chi_{\mathcal{D}}(A)$ relativement au choix de l'ordre des composantes de \mathbb{R}^n revient essentiellement à prouver que $\chi(A)$ est invariant par les bijections définissables.

Proposition 4.9. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble définissable dans une structure o-minimale \mathcal{S} .*

(i)- *L'entier $\chi_{\mathcal{D}}(A)$ défini ci-dessus ne dépend pas du choix de la décomposition cellulaire \mathcal{D} . On le note $\chi(A)$ et on l'appelle la caractéristique d'Euler-poincaré de A .*

(ii)- *Soient $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ définissables dans \mathcal{S} :*

$$\chi(A_1 \cup A_2) = \chi(A_1) + \chi(A_2) - \chi(A_1 \cap A_2).$$

On dit que la caractéristique d'Euler-Poincaré est additive.

(iii)- *Soient $m, p \in \mathbb{N}$ tels que $m + p = n$. La fonction $\mathbb{R}^m \ni a \mapsto \chi(A_a) \in \mathbb{Z}$ est bornée et quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, $\{a \in \mathbb{R}^m; \chi(A_a) = k\}$ est définissable.*

(iv)- *Soient $p \in \mathbb{N}$ et $B \subset \mathbb{R}^p$ un ensemble définissable dans \mathcal{S} . On a :*

$$\chi(A \times B) = \chi(A) \cdot \chi(B).$$

(v)- *Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application définissable injective. Alors $\chi(A) = \chi(f(A))$. En particulier pour définir $\chi(A)$ on peut considérer une décomposition cellulaire de A construite sur n'importe quel ordre des composantes de \mathbb{R}^n .*

Preuve. (i)- Nous commençons par démontrer le résultat pour une cellule C de \mathbb{R}^n de dimension d , c'est-à-dire que quelle que soit la décomposition cellulaire \mathcal{D} de C , $\chi_{\mathcal{D}}(C) = \chi(C) := (-1)^d$.

La preuve est faite par récurrence sur n . Si $n = 1$, une cellule est soit un point, auquel cas trivialement l'énoncé est vrai, soit un intervalle $]a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$. Dans ce dernier cas une décomposition cellulaire \mathcal{D} est donnée par k points de $]a, b[$ et $k + 1$ intervalles, soit $\chi_{\mathcal{D}}(C) = -1 = (-1)^1$.

Soit $n \geq 1$ et supposons que quelle que soit la décomposition \mathcal{D}' d'une cellule C' de \mathbb{R}^n , $\chi_{\mathcal{D}'}(C') = \chi(C') := (-1)^{\dim(C')}$.

Soit C une $(i_1, \dots, i_n, 1)$ -cellule de \mathbb{R}^{n+1} au-dessus de la cellule $C' = \pi(C)$ de \mathbb{R}^n , avec $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et soit enfin \mathcal{D} une décomposition cellulaire de C . Alors $\pi(\mathcal{D})$ est une décomposition cellulaire \mathcal{D}' de C' et si $D \in C$, $D' = \pi(D)$, les cellules de $\pi^{-1}(D')$ sont $]f_0, f_1[, \dots,]f_k, f_{k+1}[, \Gamma(f_1), \dots, \Gamma(f_k)$, avec f_1, \dots, f_k des fonctions continues définissables définies sur C' . Ces cellules contribuent dans le calcul de $\chi_{\mathcal{D}}(C)$ pour :
$$\sum_{i=0}^k \chi(]f_i, f_{i+1}[) + \sum_{i=1}^k \chi(]\Gamma(f_i)[) = (k+1)(-1)^{\dim(D')+1} + k(-1)^{\dim(D')} = (-1)^{\dim(D')+1} = -\chi(D').$$
 En sommant sur toutes ces sous-familles de cellules de \mathcal{D} , on obtient :
$$\chi_{\mathcal{D}}(C) = - \sum_{D' \in \pi(\mathcal{D})} \chi(D').$$
 Mais par hypothèse de récurrence
$$\sum_{D' \in \pi(\mathcal{D})} \chi(D') = \chi(C')$$
 et donc
$$\chi_{\mathcal{D}}(C) = -\chi(D') = (-1)^{\dim(C)}.$$

Le cas où C est une $(i_1, \dots, i_n, 0)$ -cellule de \mathbb{R}^{n+1} se traite exactement de la même façon.

Montrons maintenant le résultat (i) en toute généralité. Soit A un ensemble définissable de \mathbb{R}^n et $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ deux décompositions cellulaires de A . Il existe \mathcal{D} une décomposition cellulaire de A adaptée à \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 . On a alors :
$$\chi_{\mathcal{D}}(A) = \sum_{D_1 \in \mathcal{D}_1} \sum_{D \subset D_1} \chi(D).$$
 Or d'après ce qui précède,
$$\sum_{D \subset D_1} \chi(D) = \chi(D_1)$$
 et donc :
$$\chi_{\mathcal{D}}(A) = \sum_{D_1 \in \mathcal{D}_1} \chi(D_1) = \chi_{\mathcal{D}_1}(A).$$
 De la même manière on montre que :
$$\chi_{\mathcal{D}}(A) = \chi_{\mathcal{D}_2}(A)$$
 et donc que
$$\chi_{\mathcal{D}_1}(A) = \chi_{\mathcal{D}_2}(A),$$
 ce qui termine la preuve du point (i).

(ii)- Par définition la caractéristique d'Euler-Poincaré est additive sur les ensembles disjoints. Il suffit alors d'écrire :
$$A_1 \cup A_2 = A_1 \setminus (A_1 \cap A_2) \sqcup (A_1 \cap A_2) \sqcup (A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)),$$
 puisque
$$\chi(A_2) = \chi(A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)) + \chi(A_1 \cap A_2)$$
 et
$$\chi(A_1) = \chi(A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)) + \chi(A_1 \cap A_2)$$

(iii)- Si \mathcal{D} est une décomposition cellulaire de A , $\pi(\mathcal{D})$ est une décomposition cellulaire de $\pi(A)$ et si $D' \in \pi(\mathcal{D})$, $a \in D'$, de même qu'au point (i), A_a admet une décomposition cellulaire induite par les cellules $D \in \mathcal{D}$ telles que $D \subset \pi^{-1}(D')$. Il s'ensuit que $\chi(A_a)$ ne dépend pas du choix de a dans D' . La décomposition cellulaire $\pi(\mathcal{D})$ étant finie, et la fonction $a \mapsto \chi(A_a)$ étant constante sur les cellules de $\pi(\mathcal{D})$, celle-ci est définissable et l'ensemble des points a tels que $\chi(A_a) = k$ est alors aussi définissable.

(iv)- Toujours par les mêmes arguments, si toutes les fibres d'un ensemble définissable A sont de même caractéristique d'Euler-Poincaré c , en projetant une décomposition cellulaire de A , on obtient
$$\chi(A) = c \cdot \chi(\pi(A)).$$
 En particulier :
$$\chi(A \times B) = \chi(A) \cdot \chi(B).$$

(v)- D'après (iv),
$$\chi(A) = \chi(\Gamma(f))$$
 et
$$\chi(f(A)) = \chi(\sigma(\Gamma(f))),$$
 où $\sigma(x, y) = (y, x)$ est la permutation des n premières et des m dernières composantes de \mathbb{R}^{n+m} . Il suffit donc de prouver que si C est une cellule de $\mathbb{R}^{p=n+m}$, τ est une transposition $(i, i+1)$, $i \leq p-1$, alors il existe une décomposition cellulaire \mathcal{D} de C telle que $\tau \cdot \mathcal{D}$ est aussi une décomposition cellulaire de C , (où $\tau \cdot \mathcal{D}$ est induite par la permutation des composantes τ). En effet, l'action de τ conserve la dimension des cellules et les permutations de composantes sont engendrées par les transpositions de composantes.

On fait cette preuve par récurrence sur p .

- Le cas $p = 1$ est trivial, car une cellule de $\mathbb{R}^0 \times \mathbb{R}$ est une cellule de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^0$.

Soit $p \geq 1$ et supposons que pour toute cellule de \mathbb{R}^p , pour tout $i \leq p-1$, il existe une décomposition cellulaire de C dont l'image par τ soit encore une décomposition cellulaire de $\tau \cdot C$.

- Soit maintenant C une cellule de \mathbb{R}^{p+1} .

- Supposons que $i < p$ (ce qui impose que $p \geq 2$).

On a alors, dans le cas où $C =]f, g[$ est une cellule de type 1 au-dessus de sa projection $B \subset \mathbb{R}^p$, en notant $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{p+1}$:

$$(x, y) \in \tau \cdot C \iff x \in \tau \cdot B \text{ \& } f(\tau \cdot x) < y < g(\tau \cdot x).$$

Par hypothèse de récurrence il existe une décomposition cellulaire B_1, \dots, B_k de B telle que $\tau \cdot B_1, \dots, \tau \cdot B_k$ est une décomposition cellulaire de B . Il s'ensuit que C admet la décomposition cellulaire $]f|_{B_1}, g|_{B_1}[, \dots,]f|_{B_k}, g|_{B_k}[$ et que $(\tau \cdot]f|_{B_i}, g|_{B_i}[)_{i=1, \dots, k}$ est aussi une décomposition cellulaire de C .

Le cas où C est une cellule de type 0 au-dessus de B est identique.

- Supposons que $i = p$.

On note $\pi' : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{p-1}$, $A = \pi'(B) = \pi(\pi'(C))$ et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{p+1}$. La cellule C est du type $(i_1, \dots, i_p, i_{p+1})$. Suivant les valeurs de i_p et i_{p+1} , quatre cas se présentent.

Cas 1 : $i_p = i_{p+1} = 0$.

Alors $C = \{(x, f(x), g(x)); x \in A\}$ et $\tau \cdot C = \{(x, g(x), f(x)), x \in A\}$ est bien une cellule.

Cas 2 : $i_p = 0, i_{p+1} = 1$.

On a alors $B = \Gamma(\alpha)$ et $C =]f|_B, g|_B[$. On pose $f'(x) = f(x, \alpha(x))$, $g'(x) = g(x, \alpha(x))$ et $\alpha' :]f', g'[\rightarrow \mathbb{R}$ avec $\alpha'(x, z) = \alpha(x)$. Alors $\tau \cdot C$ est la cellule $\Gamma(\alpha')$ au-dessus de la cellule $]f', g'[$.

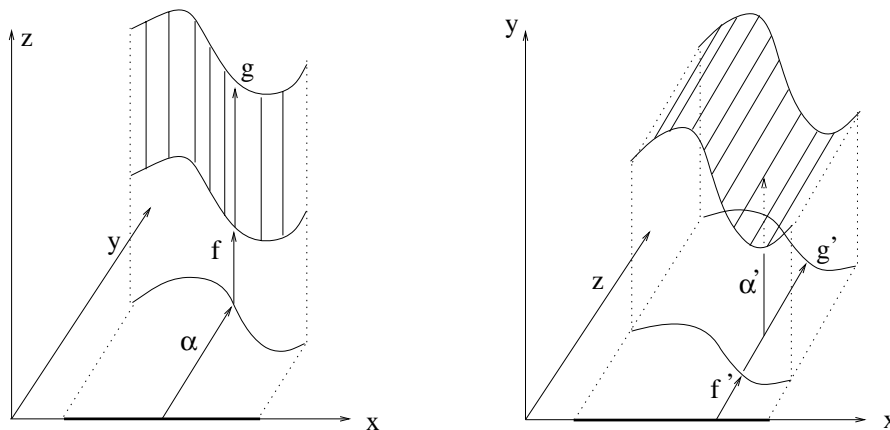


fig.10

Cas 3 : $i_p = 1, i_{p+1} = 0$ et cas 4 : $i_p = 1, i_{p+1} = 1$: se traitent grâce au théorème de monotonie. (voir [Dri] Proposition 2.13). \square

Exemple. Calculons la caractéristique d'Euler-Poincaré des sphères $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n; x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$. Pour cela on peut remarquer que S^n est $\{p\} \cup f(\mathbb{R}^n)$, où f est la projection stéréographique. D'après la Proposition 4.9.(i), $\chi(S^n) = \chi(\{p\}) + \chi(f(\mathbb{R}^n)) = 1 + \chi(f(\mathbb{R}^n))$ et d'après la Proposition 4.9.(v), $\chi(f(\mathbb{R}^n)) = \chi(\mathbb{R}^n)$. Or \mathbb{R}^n est une cellule de dimension n , donc $\chi(\mathbb{R}^n) = (-1)^n$. En conclusion :

$$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$$

Calculons la caractéristique d'Euler-Poincaré du tore T^2 . Le tore T^2 (qui est un ensemble algébrique) est en bijection avec $S^1 \times S^1$ (celle-ci est semi-algébrique). D'après la Proposition 4.9.(iv), $\chi(T^2) = \chi(S^1)^2$. Or ce qui précède montre que $\chi(S^1) = 0$.

En conclusion, comme annoncé en introduction, il n'existe pas de bijection définissable entre S^2 et T^2 .

Remarque. On dispose de la réciproque suivante de la Proposition 4.9.(v) (voir [Dri] Corollaire 2.11 Chapitre 8).

Théorème 4.10. Soient X et Y deux ensembles définissables dans une structure o-minimale sur les réels. Il existe une bijection définissable entre X et Y ssi $\dim(X) = \dim(Y)$ & $\chi(X) = \chi(Y)$.

En particulier l'ensemble des classes d'équivalence des ensembles définissables sous la relation " $X \mathcal{R} Y$ ssi il existe une bijection définissable entre X et Y " est en bijection

avec $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, soit est dénombrable.

Chapitre 5. Triangulations et trivialisations



Nous donnons essentiellement dans ce chapitre des résultats sans preuves, au moins pour les résultats principaux. Ils concernent d'une part les propriétés de triangulation et d'autre part celles dites de "trivialité".

Concernant la triangulation, l'idée générale est la suivante :

Quant à la trivialité...

5.1. Triangulation. Soit \mathcal{S} une structure o-minimale sur \mathbb{R} . Nous commençons par définir les objets linéaires (par morceaux) qui vont coder la topologie des ensembles définissables dans \mathcal{S} , les complexes simpliciaux.

Soient a_0, \dots, a_d , $d + 1$ points de \mathbb{R}^n affinement indépendants, ie qu'aucun sous-espace affine de \mathbb{R}^n de dimension $d - 1$ ne contient ces points. On note $[a_0, \dots, a_d]$ l'enveloppe convexe des points a_0, \dots, a_d , et (a_0, \dots, a_d) l'intérieur de $[a_0, \dots, a_d]$ dans l'espace affine de dimension d engendré par a_0, \dots, a_d .

On dit que (a_0, \dots, a_d) est le d -simplexe (ouvert) dont les sommets sont a_0, \dots, a_d et que $[a_0, \dots, a_d]$ est le d -simplexe fermé dont les sommets sont a_0, \dots, a_d . On a :

$$[a_0, \dots, a_d] = \left\{ \sum_{i=0}^d t_i a_i; t_i \geq 0 \ \& \ \sum_{i=0}^d t_i = 1 \right\},$$

$$(a_0, \dots, a_d) = \left\{ \sum_{i=0}^d t_i a_i; t_i > 0 \ \& \ \sum_{i=0}^d t_i = 1 \right\}.$$

Une face d'un simplexe (ouvert ou fermé) de sommets a_0, \dots, a_d est un simplexe dont les sommets sont parmi a_0, \dots, a_d . Un complexe simplicial K est la donnée d'un nombre fini de simplexes $\sigma_1, \dots, \sigma_k$, tels que : $\bar{\sigma}_i \cap \bar{\sigma}_j \neq \emptyset \Rightarrow \bar{\sigma}_i \cap \bar{\sigma}_j = \bar{\tau}$, où τ est une face commune de σ_i et σ_j , non nécessairement dans K . Enfin on note $|K| = \bigcup_{i=1}^k \sigma_i$, le polyèdre associé à K , il s'agit d'un ensemble définissable borné de \mathbb{R}^n .

Définitions (Triangulation d'un ensemble). Étant donné $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble définissable dans \mathcal{S} , on dit que le couple (K, Φ) est une triangulation (définissable) de A ssi K est un complexe simplicial et $\Phi : |K| \rightarrow A$ un homéomorphisme définissable. On dit souvent que K ou $|K|$ est une triangulation de A , ce qui revient à oublier l'homéomorphisme Φ . Si $B \subset A$ est un ensemble définissable dans \mathcal{S} , on dit que la triangulation (K, Φ) est adaptée à B ssi il existe un sous-ensemble L de simplexes de K tels que $(L, \Phi|_{|L|})$ soit une triangulation de B .

Définitions (Triangulation d’une application). Une application $f : \sigma \rightarrow \mathbb{R}^k$ définie sur un simplexe σ de sommets a_0, \dots, a_d est dite *linéaire* ssi pour tout $t_0, \dots, t_d > 0$ (ou ≥ 0 si σ est un simplexe fermé) tels que $\sum_{i=0}^d t_i = 1$, on a : $f(\sum_{i=0}^d t_i a_i) = \sum_{i=0}^d t_i f(a_i)$. En particulier, $f(\sigma)$ est un simplexe de même nature que σ (ie ouvert ou fermé, selon que σ est ouvert ou fermé). Soit P un polyèdre de \mathbb{R}^n . Une application $f : P \rightarrow \mathbb{R}^k$ est dite *linéaire par morceaux* ou PL (Piecewise Linear en anglais) ss’il existe un complexe simplicial K tel que $|K| = P$ et sur les simplexes duquel f est PL. Étant donnée une application (définissable continue) $f : A \rightarrow B$ on dit que f est *triangulée* s’il existe (K, Φ) et (L, Ψ) des triangulations de A et B telles que : $\Phi \circ f \circ \Psi^{-1} : |K| \rightarrow |L|$ est PL.

Exemples. Les polyèdres suivants de \mathbb{R}^3 sont des triangulations de la sphère S^2 et du tore T^2 et un d -simplexe ouvert est une triangulation de \mathbb{R}^d .

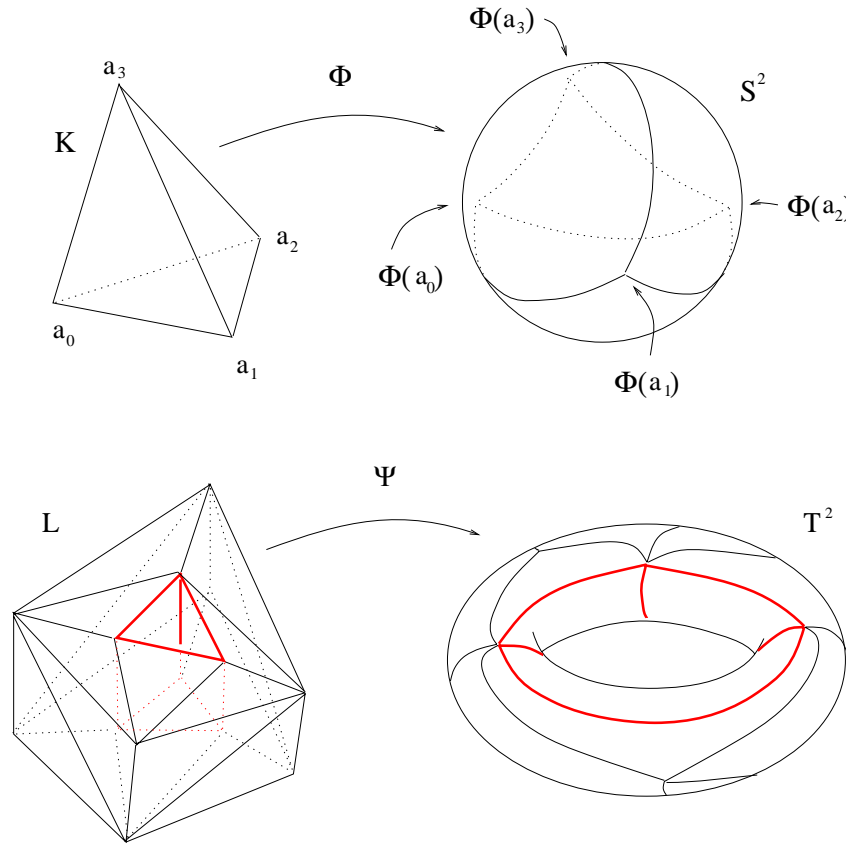


fig.10



Remarque. Toutes les applications, même semi-algébriques, ne sont pas triangulables. Par exemple l'application $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x, xy)$ n'est pas triangulable. On comprend mieux cette application en la décomposant en $f = \pi \circ h$ avec $\pi(X, Y, Z) = (X, Y)$ est la projection de \mathbb{R}^3 sur \mathbb{R}^2 , suivant la troisième composante de \mathbb{R}^3 , H l'hélice de \mathbb{R}^3 d'axe OZ , $H = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3; (X, Y) \in [0, 1]^2 \text{ \& } Y = ZX\}$ et $h : [0, 1]^2 \rightarrow H$ l'application définie par $h(x, y) = (X = x, Y = xy, Z = y)$.

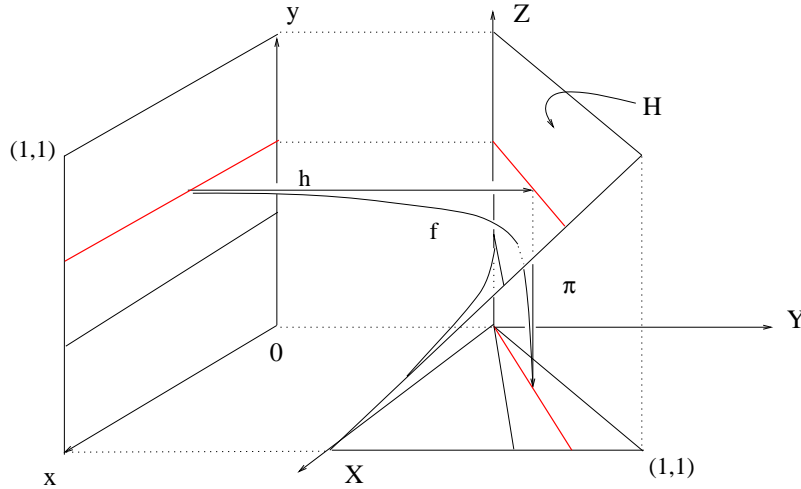


fig.11

Montrons que f n'est pas triangulable. S'il existe une triangulation (K, Φ) de $[0, 1]^2$, une triangulation (L, Ψ) de $f([0, 1]^2)$, telles que $l = \Psi^{-1} \circ f \circ \Phi$ soit PL, on remarque que f étant un homéomorphisme de $]0, 1[$ sur son image, $l_{]0, 1[}$ est un homéomorphisme sur son image (*). Si le segment $I = \{0\} \times]0, 1[\subset [0, 1]^2$ rencontre l'image par Φ de l'adhérence d'un d -simplexe ouvert σ de K ($d = 1$ ou $d = 2$), comme $f(I) = (0, 0)$ et l est PL, $l(\sigma)$ est un d' -simplexe, avec $d' < d$, ce qui contredit (*). Il s'ensuit que I ne rencontre que des sommets de K , ce qui est impossible car K est fini.

L'obstruction à trianguler les applications définissables vient essentiellement du fait que la pré-image d'un ensemble fini par une application définissable peut être infini, comme c'est le cas dans l'exemple ci-dessus. Cependant on dispose des résultats suivants :

Théorème 5.1 (Triangulations des ensembles et des fonctions définissables). Soit \mathcal{S} une structure o-minimale sur \mathbb{R} , A un ensemble définissable dans \mathcal{S} fermé, A_1, \dots, A_k des ensembles définissables inclus dans A et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction

définissable continue.

(i) La fonction f est triangulable de façon adaptée à A_1, \dots, A_k , ie il existe une triangulation définissable (K, Φ) de A adaptée à A_1, \dots, A_k (les A_i sont réunion de simplexes ouverts) telle que $f \circ \Phi : |K| \rightarrow \mathbb{R}$ soit PL.

En particulier, en prenant pour f la fonction nulle sur A , il existe une triangulation définissable de A adaptée à A_1, \dots, A_k .

(ii) Les triangulations définissables sont uniques au sens suivant : si deux polyèdres $|K_1|$ et $|K_2|$ sont homéomorphes par un homéomorphisme définissable, ils sont PL-homéomorphes.

En particulier si $|K_1| \xrightarrow{\Phi_1} A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ et $|K_2| \xrightarrow{\Phi_2} A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ sont deux triangulations de f , $|K_1|$ et $|K_2|$ sont homéomorphes par l'homéomorphisme définissable $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ et donc il existe des triangulations K'_1 et K'_2 de K_1 et K_2 , en bijection PL :

$$\begin{array}{ccc}
 |K'_1| & \xrightarrow{\Phi'_1} & |K_1| \\
 & & \searrow \Phi_1 \\
 \updownarrow PL & & \updownarrow A \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\
 & & \nearrow \Phi_2 \\
 |K'_2| & \xrightarrow{\Phi'_2} & |K_2|
 \end{array}$$

Preuve. Voir [Cos2], Théorème 4.5, [Cos2], Théorème 3.12, [Dri], Théorème 2.9 Chapitre 8. L'unicité est due à M. Shiota.

De ce théorème on tire les théorèmes suivants :

Théorème 5.2 (Lemme du chemin). Soit \mathcal{S} une structure o-minimale sur \mathbb{R} , $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble définissable dans \mathcal{S} et $a \in \bar{A}$.

(i) Il existe $\gamma[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue et définissable telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(]0, 1]) \subset A$.

(ii) Si $\mathcal{S} = \mathcal{S}\mathcal{A}$, on peut supposer dans (i) que $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, est de Nash (ie semi-algébrique et \mathcal{C}^ω) et que $\gamma(0) = a$, $\gamma(]0, 1]) \subset A$.

Preuve. (i)- Soit $|K| \xrightarrow{\Phi} \bar{A}$ une triangulation de \bar{A} adaptée à A et $x \in |K|$ tel que $\Phi(x) = a$. Il existe un simplexe ouvert σ de K tel que $x \in \bar{\sigma}$ et $\Phi(\sigma) \subset A$. Il suffit alors de paramétrer linéairement un segment joignant le barycentre de σ à x et de composer par l'application définissable et continue Φ pour obtenir γ .

(ii)- D'après le troisième point des remarques sur les applications de Nash qui terminent le Chapitre 3, il existe $p_i \in \mathbb{N}^*$ et $f_i : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ analytique telle que les composantes γ_i de γ vérifient $\gamma_i(t_i^{p_i}) = f_i(t)$. En composant γ avec t^p , où p est le ppmc des p_i , on obtient le résultat. \square

Exemple d'application du lemme du chemin : le link d'une singularité isolée est lisse. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de \mathbb{R}^n de classe \mathcal{C}^1 , de dimension 1, définissable, telle que $0 \in \bar{A} \setminus A$. Nous allons montrer que la limite en 0 des sécantes à A existe, que la limite en 0 des tangentes à A existe et que ces deux limites coïncident.

Tout d'abord remarquons qu'il existe $R > 0$ et un arc définissable continu $\gamma :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que $\gamma(0) = 0$, $\gamma(]0, 1[) = A \cap B(0, R)$ et γ est \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$. Ceci résulte directement du théorème de décomposition cellulaire \mathcal{C}^1 . On note encore A pour $A \cap B(0, R)$, puisque notre problème est local.

Notons $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Par le théorème de monotonie, on peut supposer (quitte à considérer $A \cap B(0, R')$ au lieu de A) que les γ_i sont strictement monotones, et donc définissent des bijections \mathcal{C}^1 sur un intervalle $]0, 1[$. À nouveau par le théorème de monotonie, leur dérivé γ'_i admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. Au besoin, on peut reparamétriser les $t \mapsto \gamma_i(t)$ à l'aide de $\gamma_j^{-1} : s \ni]0, \alpha[\mapsto t \in]0, 1[$, pour un certain $j \in \{1, \dots, n\}$ (on choisit j tel que $|\gamma'_j| > |\gamma'_i|$ au voisinage de 0, pour tout $i \neq j$, ce qui est possible, car les fonctions définissables $\gamma'_j - \gamma'_i$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ont toutes un signe constant au voisinage de 0). Il s'ensuit que l'on peut supposer que A est la trajectoire d'un arc définissable \mathcal{C}^1 $\gamma :]0, \alpha[\rightarrow \mathbb{R}^n$, tel que $\lim_{s \rightarrow 0} \gamma(s) = 0$ et $\lim_{s \rightarrow 0} \gamma'(s) := l \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existe.

Soit alors $s \in]0, \alpha[$. D'après le théorème des accroissements finis il existe $s_1, \dots, s_n \in]0, s[$ tels que $\gamma_i(s) = \gamma'(s_i)s$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

La droite tangente à $A = \gamma(]0, 1[)$ en $\gamma(s)$ est dirigée par $\gamma'(s)$ et la droite sécante en $\gamma(s)$ à A est dirigée par $\gamma(s)$, et donc aussi par $\gamma(s)/s = (\gamma'_1(s_1), \dots, \gamma'_n(s_n))$.

Il s'ensuit, puisque $\lim_{s \rightarrow 0} (\gamma'_1(s_1), \dots, \gamma'_n(s_n)) = l$, que la direction limite en 0 de la sécante à A est l , c'est-à-dire la direction limite en 0 de la tangente à A .

On en déduit immédiatement le lemme suivant :

Proposition 5.3 (Lemme de Whitney). *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble définissable dans une structure o-minimale \mathcal{S} , tel que A soit une sous-variété de dimension d de \mathbb{R}^n et de classe \mathcal{C}^1 . Supposons que $a \in \bar{A} \setminus A$ (le cas $a \in A$ étant trivial). Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de A de limite a telle que la suite de droites $(aa_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ dans $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ et telle que la suite $(T_{a_n}A)_{n \in \mathbb{N}}$ des espaces tangents en a_n à A converge vers T dans l'espace $\mathbb{G}_{d,n}(\mathbb{R})$ des plans vectoriels de \mathbb{R}^n (\dagger). Alors $\ell \in T$.*

Preuve. Supposons que pour un certain $\epsilon > 0$, l'ensemble définissable $\Sigma = \{x \in A; \text{angle}((ax), T_xA) > \epsilon\}$ contienne a dans son adhérence. Par le lemme du chemin il existe $\gamma :]0, 1[\rightarrow A$ un arc continu, définissable et \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$ tel que $\gamma(]0, 1[) \subset \Sigma$ et $\gamma(0) = a$. D'après la remarque qui précède l'énoncé, la limite de la sécante $(a\gamma(s))$ quand $s \rightarrow 0$ est la limite de la tangente à $\gamma(]0, 1[)$ en $\gamma(s)$ quand $s \rightarrow 0$. Or la tangente à $\gamma(]0, 1[)$ en $\gamma(s)$ est contenue dans $T_{\gamma(s)}A$. Ceci impose que $\lim_{s \rightarrow 0} \text{angle}((a\gamma(s)), T_{\gamma(s)}A) = 0$. Mais comme d'autre part $\gamma(]0, 1[) \subset \Sigma$, on obtient un

(\dagger) Les espaces $\mathbb{G}_{d,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{G}_{1,n}(\mathbb{R})$ étant compacts, quitte à extraire une sous-suite de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on peut toujours supposer que les deux suites $(aa_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(T_{a_n}A)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.

contradiction avec $\text{angle}((a\gamma(s)), T_{\gamma(s)}A) > \epsilon > 0$. \square

Soit maintenant $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble définissable, $a \in A$. On note $\mathcal{L}_r(A, a)$ l'ensemble définissable :

$$\mathcal{L}_r(A, a) := A \cap S^{n-1}(a, r).$$

On suppose dans la proposition qui suit que $A \setminus \{a\}$ est une sous-variété lisse (ie \mathcal{C}^k , $k \geq 1$) de \mathbb{R}^n . En général on sait que A est seulement réunion finie de telles sous-variétés, de sorte que la Proposition 5.3 s'applique à chacune d'entre-elles.

Proposition 5.4. *Si A est un ensemble définissable dans une structure o-minimale \mathcal{S} et si $a \in A$ et $A \setminus \{a\}$ est lisse, il existe $R > 0$, tel que pour tout $r \in]0, R[$, $\mathcal{L}_r(A, a)$ est une sous-variété lisse de \mathbb{R}^n (de même classe que $A \setminus \{a\}$).*

Remarque. On peut appliquer la Proposition 5.4 à un ensemble définissable quelconque, non nécessairement lisse. Il suffit de décomposer cet ensemble en un nombre fini de strates lisses et d'appliquer la Proposition 5.4 à chacune de ces strates.

Preuve. Il suffit de prouver que pour tout $r > 0$ suffisamment petit, les sous-variétés $A \setminus \{a\}$ et $S^{n-1}(a, r)$ se coupent transversalement, ie que pour tout $x \in A$, $\|x\| > 0$ suffisamment petit, $T_x A + T_x S^{n-1} = \mathbb{R}^n$. Ceci revient à dire que $T_x A$ n'est pas contenu dans l'hyperplan $T_x S^{n-1} = (x - a)^\perp$. Soit M l'ensemble des points x de A pour lesquels $T_x A \subset x^\perp$. Cet ensemble est définissable car $x \rightarrow T_x A$ est définissable. Si $a \in \bar{M}$, par le lemme du chemin il existe un arc définissable continu $\gamma :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(]0, 1[) \subset M$. Comme la tangente $T(\gamma(x))$ à la trajectoire $\gamma(]0, 1[)$ en $\gamma(x)$ est contenu dans $T_{\gamma(x)} A$ et que $\gamma(x) \in M$, $T(\gamma(x)) \perp \gamma(x) - a$. Mais $\gamma(x) - a$ étant la sécante à l'arc $\gamma(]0, 1[)$ en $\gamma(x)$ et celui-ci étant continu en $x = 0$, le lemme de Whitney 5.3 conduit à une contradiction, puisqu'on devrait avoir la coïncidence de la limite de la tangente et de la sécante le long de la trajectoire de γ . \square

Définition (Link simplicial). Soit K un complexe simplicial et x un sommet de K . On considère $K(x)$ l'ensemble des simplexes de K dont l'adhérence contient x . Si $|K|$ est compact, on définit le link simplicial de $|K|$ en x comme l'ensemble des faces τ des simplexes de $K(x)$, telles que $x \notin \bar{\tau}$.

Si $|K|$ n'est pas fermé, considérons

$$N_x(K) = \{\tau \in K; \exists \sigma \in K, \tau \subset \bar{\sigma}, \dim(\sigma) = \dim(\tau) + 1, x \in \bar{\sigma}\}.$$

On note $\mathcal{L}(K, x)$ l'ensemble des simplexes de $N_x(K)$ ne contenant pas x dans leur adhérence. Lorsque $|K|$ est compact, les deux notions de link définies coïncident. On appelle $\mathcal{L}(K, x)$ le *link du complexe simplicial K en x* .

Théorème. On montre que si $h : |K| \rightarrow |L|$ est un homéomorphisme (resp. un homéomorphisme définissable), $\mathcal{L}(K, x)$ et $\mathcal{L}(L, h(x))$ sont homéomorphes (resp. définissablement homéomorphes) (cf [Mau] Théorème 2.4.5).

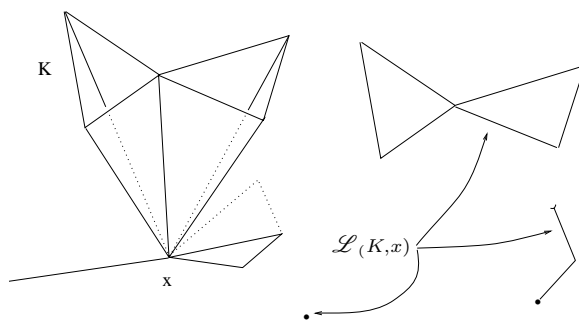


fig.12

Définition (Link géométrique). Soit A un ensemble définissable dans une structure o-minimale \mathcal{S} et $a \in A$. On appelle $\mathcal{L}_r(A, a) := A \cap S^{n-1}(a, r)$ le *link* de A en a de rayon r .

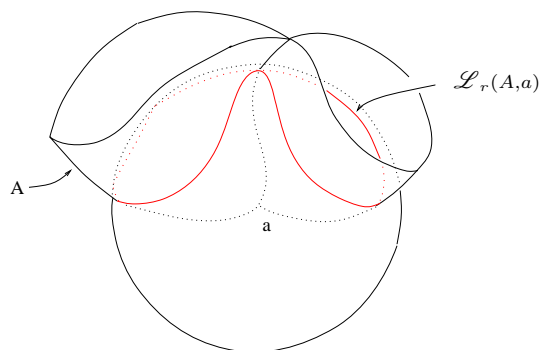


fig.13

A priori l'ensemble définissable $\mathcal{L}_r(A, a)$ dépend de r . Cependant on montre que le type topologique de $\mathcal{L}_r(A, a)$ est indépendant de r (pour r suffisamment petit), et même que ce type topologique contient toute la topologie de A au voisinage de a . Dans la définition de $\mathcal{L}_r(A, a)$, les sphères sont les sphères définies par la distance euclidienne. On montre qu'en réalité le choix de la "fonction distance au point a " ne change pas la topologie du link qu'elle définit. En effet, soit $\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction définissable continue telle que $\delta^{-1}(0) = \{a\}$. Notons $B^\delta(a, r)$ et $S^\delta(a, r)$ la boule et la sphère de rayon r pour la fonction δ et $\mathcal{L}_r^\delta(A, a) := \delta^{-1}(r) \cap A$. Alors $\mathcal{L}_r^\delta(A, a)$ et $\mathcal{L}_r(A, a)$ sont homéomorphes, pour tout r suffisamment petit (Théorème 5.5).

Pour $L \subset \mathbb{R}^n$, et $a \notin L$, on note $a * L$ le cône de sommet a et de base L , ie

$a * L = \{a + t(l - a); l \in L, t \in [0, 1]\}$. On notera $(t, x) \in]0, 1[\times L$ un point de $a * L \setminus \{a\}$ et abusivement $(1, x)$ par x et $\{1\} \times L$ par L .

Théorème 5.5 (Structure conique locale). Soient A un compact définissable dans une structure o-minimale \mathcal{S} sur \mathbb{R} , $a \in A$ et $\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction définissable continue telle que $\delta^{-1}(0) = \{a\}$.

(i) Il existe alors $R > 0$ et un homéomorphisme $h : a * \mathcal{L}_R^\delta(A, a) \rightarrow B^\delta(a, R) \cap A$, avec $h(x) = x$, pour tout $x \in \mathcal{L}_R^\delta(A, a)$ et $\delta(h(t, x)) = t$, pour tout $(t, x) \in a * \mathcal{L}_R^\delta(A, a)$.

En particulier, quels que soient $0 < r, r' \leq R$, $\mathcal{L}_r^\delta(A, a)$ et $\mathcal{L}_{r'}^\delta(A, a)$ sont homéomorphes. On note $\mathcal{L}_r^\delta(A, a)$ par $\mathcal{L}^\delta(A, a)$, pour tout $r \in]0, R[$.

(ii) Soit $\Phi : |K| \rightarrow A$ une triangulation (définissable) de A . Il existe un homéomorphisme définissable entre $\mathcal{L}_R^\delta(A, a)$ et $\mathcal{L}(K, \Phi^{-1}(a))$.

En particulier le type topologique définissable de $\mathcal{L}^\delta(A, a)$ ne dépend pas de δ .

Preuve. (i) Soit $|M| \xrightarrow{\Phi} A \xrightarrow{\delta} \mathbb{R}^+$ une triangulation de δ . Comme $\delta \circ \Phi$ est PL et que δ possède en a un minimum, le point a est nécessairement l'image d'un sommet $w \in M$. Soit maintenant $0 < R < \min\{\delta(\Phi(v)); v \text{ sommet de } M, v \neq w\}$. Tout point $a' \in S^\delta(a, R) \cap A$ est alors l'image par Φ d'un point $x \in M$ contenu dans un simplexe ayant w pour sommet. L'application $h(ta + (1 - t)a') = \Phi(tw + (1 - t)x)$ est telle que $\delta(h(ta + (1 - t)a')) = \delta(\Phi(tw + (1 - t)x)) = t\delta(\Phi(w)) + (1 - t)\delta(\Phi(x)) = (1 - t)R$ et définit bien un homéomorphisme de $a * \mathcal{L}_R^\delta(A, a)$ dans $B^\delta(a, R) \cap A$.

Il s'ensuit que pour $r \in]0, R[$, $\mathcal{L}_r^\delta(A, a)$ est homéomorphe à $\{(t, x) \in a * \mathcal{L}_R^\delta(A, a); t = r\}$ qui est lui-même homéomorphe à $\{(t, x) \in a * \mathcal{L}_R^\delta(A, a); t = R\}$. La seconde partie de l'assertion (i) est donc prouvée.

(ii) Si $|M| \xrightarrow{\Phi} A \xrightarrow{\delta} \mathbb{R}^+$ est une triangulation de A , le choix de R qui précède assure que $\Phi^{-1}(\mathcal{L}_R^\delta(A, a))$ est homéomorphe au link simplicial $\mathcal{L}(M, \Phi^{-1}(a))$. Maintenant si $\Psi : |K| \rightarrow A$ est une triangulation de A , $|M|$ et $|K|$ sont homéomorphes et par unicité du link simplicial, $\mathcal{L}(K, \Psi^{-1}(a)) \simeq \mathcal{L}(M, \Phi^{-1}(a)) \simeq \mathcal{L}_R^\delta(A, a)$. \square

Corollaire 5.6. Deux germes (A, a) et (B, b) d'ensembles définissables sont définissablement homéomorphes ssi leurs links sont définissablement homéomorphes.

Preuve. Si pour $R > 0$ suffisamment petit, $\mathcal{L}_R(A, a) \simeq \mathcal{L}_R(B, b)$, on en déduit que $a * \mathcal{L}_R(A, a) \simeq b * \mathcal{L}_R(B, b)$ et donc par le Théorème 5.4.(i) : $A \cap B(a, R) \simeq B \cap B(b, R)$.

Réciproquement, supposons que les germes (A, a) et (B, b) sont homéomorphes, et soient $(|K|, v) \rightarrow (A, a)$, $(|M|, w) \rightarrow (B, b)$ deux triangulations d'un représentant des germes (A, a) et (B, b) . L'homéomorphisme induit $(|M|, w) \simeq (|K|, v)$ donne un homéomorphisme sur les links simpliciaux $\mathcal{L}(M, w) \simeq \mathcal{L}(K, v)$. Or d'après 5.4.(ii), $\mathcal{L}(M, w) \simeq \mathcal{L}_R(A, a)$ et $\mathcal{L}(K, v) \simeq \mathcal{L}_R(B, b)$, ce qui permet de conclure à : $\mathcal{L}_R(A, a) \simeq \mathcal{L}_R(B, b)$. \square

5.2. Caractéristique d'Euler-Poincaré et triangulations. Si K est une triangulation d'un ensemble définissable compact A , on montre que $\chi(A)$ peut être calculé

grâce à K . Le complexe simplicial K est fini puisque A est compact et en notant N_d le nombre de d -simplexes de K , on montre que : $\chi(A) = \sum_{d=0}^{\dim(A)} (-1)^d N_d$. Ceci montre en particulier que $\sum_{d=0}^{\dim(A)} (-1)^d N_d$ ne dépend pas de la triangulation K de A . De plus on montre que la caractéristique d'Euler-Poincaré est invariant par homéomorphisme (et non pas seulement par bijection définissable, comme l'affirme la Proposition 4.9.(v)).

5.3. Type topologique d'un ensemble algébrique. On traite dans cette section de la question suivante : étant donné A un ensemble semi-algébrique de \mathbb{R}^n , A est-il homéomorphe à un ensemble algébrique ?

Notons que dans cette question on ne demande pas que l'homéomorphisme soit semi-algébrique. Une première condition nécessaire est donnée par le théorème suivant, dû à D. Sullivan :

Théorème 5.7 ([Sul]). *Soit A un ensemble (homéomorphe à un ensemble) algébrique. Quel que soit $a \in A$, $\chi(\mathcal{L}(A, a)) \in 2\mathbb{Z}$.*

Preuve. Voir [Sul], [Boc-Cos-Roy] [Cos3] pour une preuve complète. On peut se persuader de la nécessité de la condition $\chi(\mathcal{L}(A, a)) \in 2\mathbb{Z}$ pour les ensembles semi-algébriques de dimension 1 de \mathbb{R}^2 . Pour un tel ensemble A , $\chi(\mathcal{L}(A, a))$ est le nombre de demi-branches de A qui arrivent en $a = (\alpha, \beta)$. En effet, puisque A est réunion finie de variétés de Nash de dimension 1, par le Théorème 5.3, $\mathcal{L}(A, a)$ est une réunion finie de points. Le Théorème 5.4.(i) montre alors que $Card(\mathcal{L}(A, a))$ est le nombre de demi-branches de A qui arrivent en a . Or $Card(\mathcal{L}(A, a)) = \chi(\mathcal{L}(A, a))$. Maintenant montrons que ce nombre de branches est pair. L'ensemble algébrique A est donné par $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; P(x, y) = 0\}$ pour $P \in \mathbb{R}[X, Y]$. On suppose que pour tout x dans un voisinage de α , $P(x, Y)$ n'a pas de racines (complexes) multiples et que β est la seule racine de $P(\alpha, Y)$. Dans ces conditions si p est le nombre de racines réelles de $P(x, Y)$ pour $x > \alpha$, n est le nombre de racines réelles de $P(x, Y)$ pour $x < \alpha$, le nombre de racines complexes de $P(x, Y)$ étant d (= le degré en Y de $P(x, Y)$) et les racines non réelles étant conjuguées, $d - p$ et $d - n$ sont pairs. Les entiers n et p ont donc même parité et $n + p$ est pair. Mais $n + p$ est le nombre de demi-branches de A qui arrivent en a . \square

Si $K \xrightarrow{\Phi} A$ est une triangulation de A , d'après le Théorème 5.4.(ii), pour tout $a \in A$, $\mathcal{L}(A, a)$ est semi-algébriquement homéomorphe au link simplicial $\mathcal{L}(K, \phi^{-1}(a))$. Il s'ensuit que $\chi(\mathcal{L}(A, a)) = \chi(\mathcal{L}(K, \phi^{-1}(a)))$. Or d'après la section 5.2, $\chi(\mathcal{L}(K, \phi^{-1}(a)))$ se calcule aisément comme somme alternée des nombres de d -simplexes de $\mathcal{L}(K, \phi^{-1}(a))$.

Exemple. Le semi-algébrique A de la figure 14 n'est pas homéomorphe à un ensemble algébrique, car le Théorème 5.7 de Sullivan n'est pas satisfait en a .

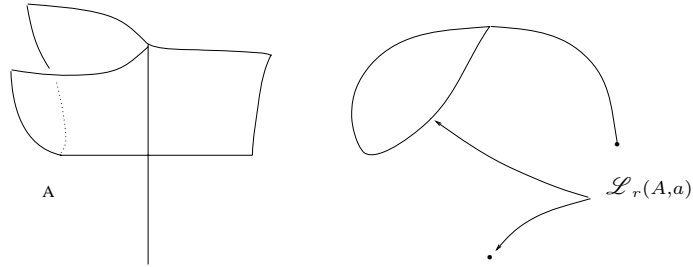


fig.14

En effet une triangulation de $\mathcal{L}_r(A, a)$ étant donnée par la figure 15, on a $\chi(\mathcal{L}_r(A, a)) = 5 - 4 = 1 \notin 2\mathbb{Z}$.

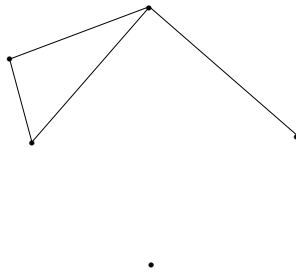


fig.15

On montre que pour les semi-algébriques de dimension ≤ 2 , la condition nécessaire du Théorème 5.7 est suffisante :

Théorème 5.8 ([Akb-Kin]). *Soit A un ensemble compact semi-algébrique de dimension ≤ 2 . Alors A est homéomorphe à un ensemble algébrique ssi quel que soit $a \in A$, $\chi(\mathcal{L}(A, a)) \in 2\mathbb{Z}$.*

Il est montré dans [Akb-Kin] que pour les ensembles semi-algébriques A de dimension 3, il convient d'ajouter 4 conditions supplémentaires à la condition :

$$\forall a \in A, \chi(\mathcal{L}(A, a)) \in 2\mathbb{Z},$$

afin d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour que A soit homéomorphe à un ensemble algébrique.

Enfin, dans [McC-Par], les auteurs donnent $2^{43} - 43$ conditions indépendantes nécessaires pour qu'un ensemble semi-algébrique de dimension 4 soit homéomorphe à un ensemble algébrique. On ne sait pas si ces conditions sont suffisantes...

5.4. Trivialité topologique. On montre dans cette section que le type topologique définissable des fibres d'un ensemble définissable est fini. Précisément : Étant donné un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$ définissable dans une structure o-minimale \mathcal{S} sur \mathbb{R} , il existe un nombre fini de points $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^p \times \{0\}^m$, tels que quel que soit $a \in \mathbb{R}^p \times \{0\}^m$, la fibre X_a de la projection $\pi : X \rightarrow \mathbb{R}^p \times \{0\}^m$ soit définissablement homéomorphe à la fibre X_{a_j} , pour un certain $j \in \{1, \dots, k\}$.

On retrouve en particulier que la caractéristique d'Euler-Poincaré des sections de X avec un plan affine de direction donnée varie dans un sous-ensemble fini de \mathbb{Z} (cf Proposition 4.9.(iii)).

L'énoncé général est en réalité plus précis.

Définition. Soit $f : X \rightarrow B$ une application continue définissable. On dit que f est *définissablement triviale (au-dessus de B)* ss'il existe $a \in B$ tel que $f^{-1}(\{a\}) \times B$ est homéomorphe à X par un homéomorphisme définissable $h : f^{-1}(\{a\}) \times B \rightarrow X$ tel que pour tout $(x, b) \in f^{-1}(\{a\}) \times B$, $f(h(x, b)) = b$.

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(\{a\}) \times B & \xrightarrow{h} & X \\ \pi \searrow & & \swarrow f \\ & B & \end{array}$$

Notons qu'alors $h^{-1} = (\varphi, f)$, pour une certaine application définissable $\varphi : X \rightarrow f^{-1}(\{a\})$.

Théorème 5.9 (Théorème de trivialité topologique de Hardt). Soit $f : X \rightarrow B$ une application définissable continue et $Y_1, \dots, Y_\ell \subset X$ des ensembles définissables. Il existe une partition de B en ensembles définissables B_1, \dots, B_k tels que f est définissablement triviale au-dessus de chaque B_i , de façon compatible avec les Y_j (ie qu'il existe $Y'_{i,j} \subset f^{-1}(\{a_i\})$ tel que $h_i(Y_{i,j} \times B) = Y_j \cap f^{-1}(B_i)$).

Remarques. Ce théorème a été obtenu par R. Hardt dans le cas semi-algébrique, pour une preuve, voir [Boc-Cos-Roy] Théorème 9.3.2, [Cos1], [Cos2], [Dri] Théorème 1.7 Chapitre 9, [Har].

On retrouve le théorème de structure conique locale 5.4.(i) à l'aide du Théorème de trivialité de Hardt, puisque si $d : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ est la fonction distance au point $x \in X$, par le Théorème 5.9, il existe un intervalle ouvert $]0, \alpha[$ et $r \in]0, \alpha[$ tels que $d^{-1}(r) \times]0, \alpha[$ est définissablement homéomorphe à $d^{-1}(]0, \alpha[)$, de telle façon que pour tout $r' \in]0, \alpha[$, $d^{-1}(r) \times \{r'\}$ et $d^{-1}(r')$ soient aussi définissablement homéomorphes. Or $d^{-1}(r) \times]0, r] = \mathcal{L}_r(X, x) \times]0, r]$ et $d^{-1}(]0, r]) = (X \cap (B(x, r))) \setminus \{x\}$. Il s'ensuit que $x * \mathcal{L}_r(X, x)$ est définissablement homéomorphe à $X \cap B(x, r)$.

Le Théorème de trivialité permet aussi de retrouver que le nombre de composantes connexes des fibres d'une application $f : X \rightarrow B$ est fini, puisque le nombre de types topologiques des fibres d'une application est fini.

Dans le cas semi-algébrique, on peut de plus borner explicitement le nombre de composantes connexes des fibres de $\pi : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, lorsque $X \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ en fonction du nombre d'égalités, d'inégalités servant à définir le semi-algébrique X ainsi que du degré des polynômes entrant dans cette définition (cf [Cos1] Théorème 4.7).

Chapitre 6. Spectre réel



Nous résumons ici une partie de la théorie du spectre réel qui est développée dans [Boc-Cos-Roy], aussi nous indiquons systématiquement les références à cet ouvrage pour chaque définition et résultat présenté.

5.1. Corps réels clos. Les notions qui suivent sont exposés dans le chapitre 1 de [Boc-Cos-Roy].

Définition (corps ordonné). Soit k un corps. Le couple (k, \leq) est un *corps ordonné* lorsque \leq est une relation d'ordre total sur k compatible avec la structure de corps de k , ie telle que :

- $x \leq y \implies x + z \leq y + z$,
- $0 \leq x, 0 \leq y \implies xy \leq 0$.

La possibilité pour un corps d'être ordonné se teste par l'existence d'un sous-ensemble particulier de ce corps, un cône propre (Proposition 5.1) :

Définition (cône propre). Un *cône* P d'un corps k est un sous-ensemble de k tel que :

- P est stable par somme et produit,
- $x \in k \implies x^2 \in P$.

On dit de plus que P est un *cône propre* lorsque $-1 \notin P$.

Proposition 5.1. Soit k un corps. On a les équivalences suivantes :

- (i)- k peut être ordonné,
- (ii)- k possède un cône propre,
- (iii)- -1 n'est pas une somme de carrés dans k ,
- (iv)- $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \implies x_i = 0$.

Preuve. (i) \implies (ii) car $P = \{x \in k, x \geq 0\}$ est un cône propre (car si $-1 \geq 0$, donne à la fois $-1 \geq 1$ et $1 \geq -1$, soit $1 = -1$).

(ii) \implies (iii) car les sommes de carrés sont dans tout cône.

(iii) \iff (iv) car si $-1 = \sum_{i=1}^n x_i^2$, on a $\sum_{i=1}^n x_i^2 + 1^2 = 0$ et on ne peut avoir alors (iv). Réciproquement si $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ et si $x_1 \neq 0$, on a : $-x_1^2 = \sum_{i=2}^n x_i^2$, soit $-1 = \sum_{i=2}^n (x_i/x_1)^2$.

(iii) \iff (i) car si -1 n'est pas un carré, l'ensemble C des sommes de carrés est un cône propre. Par le lemme de Zorn, C est contenu dans un cône propre maximal P . On a alors $P \cup -P = k$. En effet, si $x \notin P$, $P[-x] = \{a - bx; a, b \in P\}$ est un cône propre égal

à P par maximalité de ce dernier, de sorte que $-x = 0 - 1.x \in P$. Il suffit maintenant de vérifier, sous l'hypothèse $P \cup -P = k$, que $z \leq y \iff y - z \in P$ est un ordre sur k .

Définition (corps réel). Un corps qui peut être ordonné est appelé un *corps réel*.

Remarque. On peut définir un corps réel par une des quatre propriétés équivalentes de la Proposition 5.1. De plus un corps réel est de caractéristique nulle, puisque $\sum_{i=1}^n 1 = \sum_{i=1}^n 1^2$ ne peut être nul.

Définition (corps réel clos). Un corps réel clos est un corps réel k qui vérifie une des propriétés équivalentes ci-dessous :

- (i)- k n'a pas d'extension algébrique stricte par un corps réel.
- (ii)- Il existe un unique ordre \leq sur k tel que le cône $P = \{x \in k, x \geq 0\}$ est l'ensemble des sommes de carrés et tout polynôme de $k[X]$ de degré impair possède une racine dans k .
- (iii)- L'anneau $k[i] = k[X]/(X^2 + 1)$ est algébriquement clos.

Preuve. Voir [Boc-Cos-Roy] Théorème 1.2.2 pour les équivalences.

Les corps réels clos possèdent les propriétés remarquables de \mathbb{R} comme le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème Rolle :

Proposition 5.2. Soit k un corps réel clos et $f \in k[X]$.

- (i)- Si $a, b \in k$, $a < b$ et $f(a)f(b) < 0$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.
- (ii)- Si $a, b \in k$, $a < b$ et $f(a) = f(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
- (iii)- Si $a, b \in k$, $a < b$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.
- (iv)- Si $a, b \in k$, $a < b$, et si $f'(c) > 0$ pour tout $c \in]a, b[$, f est strictement croissante sur $]a, b[$.

Preuve. Voir [Boc-Cos-Roy] Propositions 1.2.4, 1.2.5, Corollaire 1.2.6 et 1.2.7.

Sturm Tarski-Seidenberg, existence de la cloture, exemple avec les fractions rationnelles.

5.2. cone dans un anneau, cone premier

5.3 Spectre reel

Références

Références citées dans le texte :

- [Akb-Kin] S. Akbulut, H. King, Topology of real algebraic sets. MSRI Publications **25**, Springer (1992)
- [Boc-Cos-Roy] J. Bochnak, M. Coste, M. -F. Roy, Real algebraic geometry. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **36** Springer-Verlag, Berlin, (1998)
- [Cha] Z. Chatzidakis, Introduction to model theory. Notes for Luminy, Novembre 2001.
- [Cha-Kei] C. C. Chang, H. J. Keisler, Model Theory. Stud. Log. **73** North-Holland Publishing Company, (1973)
- [Cos1] M. Coste, An introduction to semialgebraic geometry. Università di Pisa, Dottorato di ricerca in Matematica, Istituti editoriali poligrafici internazionali, Pise-Rome, (2000)
- [Cos2] M. Coste, An introduction to o-minimal geometry. Università di Pisa, Dottorato di ricerca in Matematica, Istituti editoriali poligrafici internazionali, Pise-Rome, (2000)
- [Cos3] M. Coste, Real algebraic sets, Notes de cours. (2005)
- [Cos4] M. Coste, Reconnaître effectivement les ensembles algébriques réels.
- [Dri] L. van den Dries, Tame topology and o-minimal structures. *London Mathematical Society Lecture Note Series*, **248**, Cambridge University Press, Cambridge, (1998)
- [Har] R. Hardt, Semi-algebraic local triviality in semi-algebraic mappings. *Amer. J. Math*, **102**, (1980)
- [Ku-Mo-Pa] K. Kurdyka, T. Mostowski, A. Parusinski, Proof of the gradient conjecture of R. Thom. *Ann. of Math. (2)* **152** (2000), no. 3, 763-792
- [Le G-Rol] O. Le Gal, J. -Ph. Rolin, Une structure o-minimale sans décomposition cellulaire C^∞ . *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I* **346**, (2008), 309-312
- [Lom] H. Lombardi, Une étude historique sur les problèmes d'effectivité en algèbre réelle (1990). Texte non publié, en ligne :
<http://hlombardi.free.fr/publis/HistoireReelleEffective.pdf>
- [Mau] C. R. F. Maunder, Algebraic topology. *Dover Publications* (1996)
- [Pre] A. Prestel, Model theory for the real algebraic geometer. *Università di Pisa, Dottorato di ricerca in Matematica, Istituti editoriali poligrafici internazionali, Pise-Rome* (1998)
- [Ris] J. -J. Risler, Sur l'anneau des fonctions de Nash globales. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **8**, (1975), 365-378

[Sei] S. Seidenberg, A new decision method for elementary algebra. *Ann. of Math.* **60**, (1954), 365-374

[Sul] D. Sullivan, Combinatorial invariants of analytic spaces. Proc. Liverpool Singularities-Symposium I, LNM **192**, (1971), 165-168

[Tar] A. Tarski, A decision method for elementary algebra and geometry. 2nd ed. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, Calif., (1951)

Références non citées dans le texte :

E. Bierstone, P. Milman, Semianalytic and subanalytic sets. *Inst. Hautes études Sci. Publ. Math.* **67**, 5-42, (1988)

L. van den Dries, C. Miller, Geometric structures and o-minimal structures. *Duke Mathematical Journal*, **84** no. 2, (1996)

H. Hironaka, Triangulations of algebraic sets, *Proc. of Symposia in Pure Math. Amer. Math. Soc.* **29**, 165-185 (1975)

S. Lojasiewicz, Triangulation of semianalytic sets, *Annali Sc. Norm. Sup. Pisa* **18**, 449-474, (1964)

S. Lojasiewicz, Ensembles semi-analytiques, *Preprint IHES, Bures-sur-Yvette*, (1965)

S. Lojasiewicz, Sur la géométrie semi- et sous-analytique, *Ann. Inst. Fourier* **43** no. 5, 1575-1595, (1993)

M. Shiota, Geometry of subanalytic and semialgebraic sets. *Progress in Mathematics* **150**, Birkhäuser Boston, Boston MA, (1997)

M. Shiota. Nash Manifolds. *Springer Verlag Lectures Notes in Math* **1269**, (1987)

M. Shiota, Triangulation of subanalytic sets. *Singularities (Warsaw, 1985)*, *Banach Center Publ.* **20**, 385-395, (1988)

M. Shiota, M. Yokoi, Triangulation of subanalytic sets and locally subanalytic manifolds. *Trans. AMS* **286**, 727-750, (1984)

M. Shiota, Piecewise linearization of real-valued subanalytic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **312**, 663-679, (1989)

M. Shiota, Piecewise linearization of subanalytic functions II. *Real analytic and algebraic geometry (Trento, 1988)*, 247-307, *Springer, Berlin, Lecture Notes in Math.*, **1420**, 1990.

M. Shiota, Geometry of subanalytic and semialgebraic sets. *Progress in Mathematics*, **150**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, (1997)

M. Shiota, Thom's conjecture on triangulations of maps. *Topology* **39**, 383-399, (2000)

B. Teissier, Sur la triangulation des morphismes sous-analytiques. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **70**, 169-198, (1990)

B. Teissier, Résumé sur la triangulation des morphismes sous-analytiques. *Séminaire sur la géométrie algébrique réelle*, Tome I, II, 15–28, *Publ. Math. Univ. Paris VII*, **24**, (1986)

B. Teissier, Tame and stratified objects. *Geometric Galois Actions, 1. Around Grothendieck's esquisse d'un programme*. *London Math. Soc. Lecture Note Series* **242**, 231-242, (1997)

H. Whitney, Elementary structure of real algebraic varieties. *Ann. of Math.* **66**, 545-556, (1957)