Examen du 18 décembre 2009

Soient $\mathscr{S}$ une structure o-minimale sur les réels. Dans la suite "définissable" signifie "définissable dans $\mathscr{S}$".

Exercice 1 (4 points)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et X un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ définissable.

1pt **I-1.** Montrer que l'adhérence $\overline{X}$ de X est définissable.

1pt **I-2.** Montrer que les composantes connexes de X sont définissables et en nombre fini.

2pts **I-3.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et définissable. Montrer que sa dérivée est définissable.

Exercice 2 - Choix définissable et lemme du chemin (5 points)

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $X \subset \mathbb{R}^m$ un ensemble définissable non vide. On veut se donner une méthode pour choisir de façon définissable un point $e(X)$ de X.

1pt **II-1.** On suppose ici que $m = 1$.

- Si $\inf(X) \in X$, on pose $e(X) = \inf(X)$.

Supposons que $\inf(X) \notin X$ et posons $a = \inf(X) \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $\{x \in \mathbb{R};\ ]a, x[\subset X\}$ est non vide.

On pose alors $b = \sup\{x \in \mathbb{R};\ ]a, x[\subset X\}$ et on a $]a, b[\subset X$. On pose ensuite :

- $e(X) = 0$ si $a = -\infty$ et $b = \infty$,
- $e(X) = a + 1$ si $a \in \mathbb{R}$ et $b = \infty$,
- $e(X) = b - 1$ si $a = -\infty$ et $b \in \mathbb{R}$,
- $e(X) = (a + b)/2$ si $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

1pt **II-2.** En déduire, par induction sur m, le choix d'un point $e(X) \in X$ (*ind. on utilisera la projection* $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-1}$).

2pts **II-3 Choix définissable.** Montrer que si $X \subset \mathbb{R}^{n+m}$ est définissable et $\pi : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ est la projection sur les n premières coordonnées, il existe une application définissable $f : \pi(X) \to \mathbb{R}^m$ dont le graphe est inclus dans X.

2pts **II-4 Lemme du chemin.** Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble définissable et $a \in \overline{A} \setminus A$. Montrer que $\{\|a - x\|;\ x \in A\}$ contient un intervalle $]0, \epsilon[$. En appliquant le résultat de II-3 à l'ensemble $X = \{(x, s) \in \mathbb{R}^n \times]0, \epsilon[;\ \|a - x\| = s\ \&\ x \in A\}$ et à la projection $\pi : \mathbb{R}^n \times]0, \epsilon[\to]0, \epsilon[$, montrer qu'existe $\epsilon' \in]0, \epsilon[$ et $\gamma :]0, \epsilon'[\to \mathbb{R}^d$ un arc $\mathcal{C}^1$ définissable, tel que $\lim_{s \to 0} \gamma(s) = a$ et $\gamma(]0, \epsilon'[\subset A)$.

Exercice 3 - Cône tangent (20 points)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et X un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ définissable. Pour x dans $\overline{X}$, l'adhérence de X, on définit le *cône tangent* $C_x(X)$ *de* X *en* x par :

$$C_x(X) := \{u \in \mathbb{R}^n; \forall \epsilon > 0\ \exists z \in X, \exists \lambda > 0 \text{ tels que : } \|x - z\| \leq \epsilon \text{ et } \|\lambda \cdot (z - x) - u\| \leq \epsilon\}$$

1pt **III-1.** Montrer que $C_x(X)$ est définissable.

1pt **III-2.** Soit t_{-x} la translation de $\mathbb{R}^n$ de vecteur $-x$. Montrer que $C_0(t_{-x}(X)) = C_x(X)$.

Ainsi dans la suite, pour simplifier les preuves, on pourra au besoin supposer que $x = 0$.

1pt **III-3.** Montrer que $C_x(X)$ est un cône de sommet l'origine de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire que : $0 \in C_x(X)$ et que $C_x(X)$ est stable sous l'action naturelle du groupe $\mathbb{R}_+^\times$ sur $\mathbb{R}^n$, définie par : $\forall g \in \mathbb{R}_+^\times, \forall u = (u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, $g \cdot u = (gx_1, \cdots, gx_n)$.

On considère maintenant la déformation conique de X sur son cône tangent :

$$D_x(X) = \{(v, t) \in \mathbb{R}^n \times]0, 1[;\ \exists z \in X,\ \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \|z - x\| = t \text{ et } \lambda \cdot (z - x) = v\},$$

$$\text{et} \quad \sigma : \begin{array}{ccc} D_x(X) & \to &]0, 1[\\ (v, t) & \mapsto & t \end{array}$$

Soit $S_1, \cdots, S_k$ une stratification définissable $\mathcal{C}^1$ de X et $\dim_x(X) = \max\{\dim(S_i); x \in \overline{S}_i, i = 1, \cdots, k\}$. On note $\mathcal{L}(X, x)$ le link de X en x (dont on rappelle qu'il est défini par $\mathcal{L}_r(X, x) := X \cap S^{n-1}(x, r)$, avec $r > 0$ suffisamment petit).

2pts **III-4.** Montrer que $D_x(X)$ et σ sont définissables et qu'existe $R > 0$, tel que :

$$\forall t \in]0, R[,\ \dim(\sigma^{-1}(\{t\})) = \dim(\mathcal{L}(X, x)) + 1 = \dim_x(X).$$

1pt **III-5.** À l'aide de la question précédente et du théorème de Hardt, montrer qu'existe $R > 0$, tel que : $\dim(\sigma^{-1}(]0, R[)) = \dim_x(X) + 1$.

1pt **III-6.** Montrer que $C_x(X) \times \{0\} = \overline{D_x(X)} \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \subset \overline{D_x(X)} \setminus D_x(X)$. En déduire que $\dim(C_x(X)) \leq \dim_x(X)$.

On considère la déformation de X sur son cône tangent :

$$E_x(X) = \{(v, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+;\ x + \lambda \cdot v \in X\}.$$

2pts **III-7.** Montrer que $\overline{E_x(X)} \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = C_x(X) \times \{0\}$. En déduire à l'aide du lemme du chemin que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i)- $u \in C_x X \setminus \{0\}$,

(ii)- Il existe un arc $\mathcal{C}^1$ définissable $\gamma :]0, 1[\to \mathbb{R}^n$ tel que $\gamma(0) = x$, $\gamma(]0, 1[) \subset X$ et u dirige la limite quand $s \to 0$ de la droite $S_{\gamma(s)}$ sécante en $\gamma(s)$ à $\gamma(]0, 1[)$ passant par x.

(iii)- Il existe un arc $\mathcal{C}^1$ définissable $\gamma :]0, 1[\to \mathbb{R}^n$ tel que $\gamma(0) = x$, $\gamma(]0, 1[) \subset X$ et u dirige la limite quand $s \to 0$ de la droite $T_{\gamma(s)}$ tangente en $\gamma(s)$ à $\gamma(]0, 1[)$.

(*ind. appliquer le lemme du chemin à* $E_x(X)$ *puis utiliser* $E_x(X) \ni (v,\lambda) \mapsto \lambda \cdot v \in X$).

1pt **III-8.** Montrer à l'aide du théorème de Hardt qu'existent un entier k et $x_1, \cdots, x_k \in X$, tel que quel que soit $x \in X$, $C_x(X)$ est définissablement homéomorphe à $C_{x_i}(X)$, pour un certain $i \in \{1, \cdots, k\}$.

1pt **III-9.** Donner sans justification (un dessin suffit) un exemple où l'inégalité de la question III-6 est stricte.

On veut maintenant prouver qu'existe un sous-ensemble définissable Z dans X qui adhère à x, de même dimension que $C_x(X)$ et tel que $C_x(Z) = C_x(X)$. Pour cela, on considère :

$$F_x(X) = \{(v,t) \in S^{n-1}(0,1) \times]0,1[;\ \exists z \in X,\ v = \frac{1}{t}(z-x)\}.$$

Noter que pour t_0 fixé dans $]0,1[$, $F_x^{t_0}(X) := F_x(X) \cap (S^{n-1}(0,1) \times \{t_0\})$ est l'image du link $\mathcal{L}_{t_0}(X,x)$, de rayon t_0, de X en x, sous l'homothétie de centre x et rapport $1/t_0$.

1pt **III-10.** Montrer que $\overline{F_x(X)} \cap (S^{n-1}(0,1) \times \{0\}) = \mathcal{L}_1(C_x(X),0) \times \{0\}$, où $\mathcal{L}_1(C_x(X),0)$ est le link de $C_x(X)$ de centre 0 et de rayon 1.

2pts **III-11.** Montrer à l'aide du théorème de structure conique locale appliqué au germe (X,x), qu'il existe $R \in]0,1[$ et un homéomorphisme définissable

$$p : F_x^R(X) \times]0,R] \to F_x(X) \cap (S^{n-1}(0,1) \times]0,R])$$

qui induit pour tout $t \in]0,R]$ un homéomorphisme définissable $F_x^R(X) \times \{t\} \simeq F_x^t(X)$.

2pts **III-12.** Montrer que l'application p de la question précédente induit une application définissable surjective

$$\pi : F_x(X) \cap (S^{n-1}(0,1) \times]0,R[) \to \mathcal{L}_1(C_x(X),0) \times]0,R]$$

telle que $\pi(F_x^t(X)) \subset \mathcal{L}_1(C_x(X),0) \times \{t\}$ (*ind. en notant* $(w,t) = p^{-1}(v,t)$ *considérer* $\pi(v,t) = (\lim_{s \to 0} p(w, s \cdot t), t)$).

2pts **III-13.** À l'aide théorème du choix définissable prouvé en II-3, montrer qu'il existe un ensemble définissable Y de dimension $\dim(\mathcal{L}_1(C_x(X),0)) + 1 = \dim_x(X)$ dans $F_x(X)$ tel que $\overline{Y} \cap (S^{n-1}(0,1) \times \{0\}) = \overline{F_x(X)} \cap (S^{n-1}(0,1) \times \{0\}) = C_x(X) \times \{0\}$.

2pts **III-14.** À l'aide de la question précédente, montrer qu'existe $Z \subset X$ définissable dans $\mathscr{S}$ tel que :

$$x \in \overline{Z},\ \dim_x(Z) = \dim(C_x(X)),\ \text{et } C_x(Z) = C_x(X).$$