MATH321 - Examen du 15 novembre 2016

(1pt) **Question de cours 1.** Donner la définition d'une échelle de comparaison asymptotique $\mathcal{F} = (g_i)_{i\in I}$ en un point $a \in \mathbb{R}$.

(1pt) **Question de cours 2.** Donner la définition de ≪ la fonction f possède un développement asymptotique en a à l'ordre $N \in \mathbb{N}$, relativement à l'échelle $\mathcal{F} = (g_i)_{i\in I}$ ≫.

(2pts) **Question de cours 3.** Soit $\mathcal{F} = (g_i)_{i\in I}$ une échelle de comparaison asymptotique en un point $a \in \mathbb{R}$. Montrer que si une fonction f (définie sur un voisinage de a), admet un développement asymptotique en a à l'ordre $N \in \mathbb{N}$ relativement à l'échelle $\mathcal{F}$, alors celui-ci est unique.

Exercice 1.

(2pts) **1.** Donner un DL_0^4 de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$. En déduire, en justifiant, un DL_0^8 de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(2pts) **2.** Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \arcsin x$. En déduire, en justifiant, un DL_0^9 de la fonction $x \mapsto \arcsin x$.

(1pt) **3.** On considère la fonction, $x \mapsto \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, définie sur un certain intervalle $]0, \alpha[$, $\alpha > 0$. Déduire de la question précédente un DL_0^4 de cette fonction.

(1pt) **4.** Donner, en justifiant, un DL_0^3 de la fonction $]0, \alpha[\ni x \mapsto \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}}$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}\backslash\{n\pi;\ n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x} - \log x$.

(2pts) **1.** Montrer que f est strictement décroissante sur chaque intervalle $]n\pi, (n+1)\pi[$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique racine x_n sur $]n\pi, (n+1)\pi[$.

(2pts) **2.** Montrer que

$$n\pi < x_n < \frac{\pi}{2} + n\pi, \qquad (*)$$

et en posant $y_n = x_n - n\pi$, montrer que

$$\tan y_n = \tan x_n = \frac{1}{\log x_n} \qquad (**)$$

(2pts) **3.** Déduire de la question précédente que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

(2pts) **4.** À l'aide d'un DL_0^1 de arctan et de $(**)$, montrer qu'existe une fonction ε de limite nulle en $+\infty$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = \dfrac{1}{\log x_n} + \dfrac{\varepsilon(n)}{\log x_n}$.

(2pts) **5.** À l'aide de la question précédente et de $(*)$, montrer que

$$y_n \sim_{+\infty} \frac{1}{\log n\pi} \sim_{+\infty} \frac{1}{\log n}.$$

Corrigé Exercice 1.

1. La fonction $f(x) = (1+x)^{-1/2}$ est C^∞ sur $]-1, +\infty[$, ses dérivées successives valent $f'(x) = \frac{-1}{2}(1+x)^{-3/2}$, $f''(x) = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}(1+x)^{-5/2}$, $\cdots f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k}(1+x)^{-(2k+1)/2}$. D'après la formule de Taylor à l'ordre 4 en 0

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \frac{35x^4}{128} + o(x^4).$$

Il s'ensuit, par composition des DL (Proposition **??**), que

$$g(x) = f(-x^2) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{5x^6}{16} + \frac{35x^8}{128} + o(x^8).$$

2. La fonction arcsin est dérivable dans un voisinage de 0 et sa dérivée est, d'après la formule de la dérivée de la fonction inverse, $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = g(x)$. D'après la Proposition **??**, On obtient le DL suivant de arcsin

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \frac{35x^9}{1152} + o(x^9).$$

3. On a

$$\frac{\arcsin x}{x} = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{3x^4}{40} + \frac{5x^6}{112} + \frac{35x^8}{1152} + o(x^8),$$

et donc

$$\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{x}{6} + \frac{3x^2}{40} + \frac{5x^3}{112} + \frac{35x^4}{1152} + o(x^4)$$

4. D'après la Proposition **??**, le produit des DL_0^3 de f et de arcsin, tronqué à l'ordre 3, fournit le DL_0^3 de $f(x)\arcsin x$. On obtient :

$$[1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16}][1 + \frac{x}{6} + \frac{3x^2}{40} + \frac{5x^3}{112}]$$

$$= 1 - \frac{x}{3} + \frac{11x^2}{30} - \frac{17x^3}{70} + +o(x^3)$$

Corrigé Exercice 2.

1. La fonction f est dérivable sur chaque intervalle $]n\pi, (n+1)\pi[$ et sa dérivée est $\dfrac{-1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x} < 0$. On en déduit que f est strictement décroissante sur $]n\pi, (n+1)\pi[$. D'autre part, au voisinage de $n\pi$ dans $]n\pi, (n+1)\pi[$, cos et sin sont de même signe, et $\sin x \to 0, |\cos x| \to 1$, quand $x \to n\pi$, donc $\lim\limits_{x\to n\pi, x>n\pi} f(x) = +\infty$. Tandis qu'au voisinage de $(n+1)\pi$ dans $]n\pi, (n+1)\pi[$, sin et cos sont de signes opposés, donc $\lim\limits_{x\to(n+1)\pi, x<(n+1)\pi} f(x) = -\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution à l'équation $f(x) = 0$ sur $]n\pi, (n+1)\pi[$.

2. On a $\lim\limits_{x\to n\pi, x>n\pi} f(x) = +\infty$, $f(\pi/2 + n\pi) = -\log(\pi/2 + n\pi) < 0$ et f strictement décroissante sur $]n\pi, (n+1)\pi[$, ce qui montre $(*)$. Il s'ensuit que la quantité $\tan x_n$ est bien définie, puisque $x_n \neq \pi/2 + n\pi$, et $f(x_n) = 0$ équivaut bien à $(**)$. Notons que $\tan(x_n - n\pi) = \tan x_n$ car $\sin(x_n - n\pi) = (-1)^n \sin x_n$ et $\cos(x_n - n\pi) = (-1)^n \cos x_n$.

3. On a $y_n = \arctan(1/\log x_n)$ par $(**)$. D'autre part $1/\log x_n \to_{+\infty} 0$ par $(*)$, arctan est continue en 0 et $\arctan 0 = 0$. On en conclut que $\lim_{n\to+\infty} y_n = \arctan(\lim_{n\to+\infty} 1/\log x_n) = 0$.

4. La fonction arctan est dérivable en 0 et de dérivée égale à 1, de sorte que par la Proposition **??**, $\arctan y - \arctan 0 = \arctan y = y + y\nu(y)$, avec $\nu(y)$ une fonction qui tend vers 0 quand y tend vers 0.

D'autre part puisque $y_n = \arctan(\frac{1}{\log x_n})$, par $(**)$, il s'ensuit que $y_n = \frac{1}{\log x_n} + \frac{1}{\log x_n}\nu(\frac{1}{\log x_n})$. Mais comme $\frac{1}{\log x_n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, en posant $\varepsilon(n) = \nu(\frac{1}{\log x_n})$, on a bien $\varepsilon(n) \to 0$ quand $n \to \infty$.

5. D'après la question précédente,

$$y_n - \frac{1}{\log n\pi} = \frac{-\log(x_n/n\pi)}{\log x_n \log n\pi} + \frac{\varepsilon(n)}{\log x_n}.$$

Or, d'après $(*)$, $1 < x_n/n\pi < 1 + 1/2n$, donc $0 < \log(x_n/n\pi) < \log(1 + 1/2n)$ et $0 < 1/\log x_n < 1/\log n\pi$. On obtient alors

$$|y_n - \frac{1}{\log n\pi}| < \frac{\log(1 + 1/2n)}{\log^2 n\pi} + \frac{|\varepsilon(n)|}{\log n\pi} = \frac{1}{\log n\pi}\eta(n),$$

où $\eta(n) \to 0$ quand $n \to \infty$. On a alors prouvé $y_n - \frac{1}{\log n\pi} = o(\frac{1}{\log n\pi})$, c'est-à-dire que $y_n \sim_{+\infty} \frac{1}{\log n\pi}$. Mais bien sûr

$$\frac{\log n\pi}{\log n} = 1 + \frac{\log \pi}{\log n} \to_{+\infty} 1,$$

donc on a aussi

$$\frac{1}{\log n\pi} \sim_{+\infty} \frac{1}{\log n}.$$