MATH321 - Examen du 4 janvier 2016

(1pt) **Question de cours 1.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Donner la définition de la série de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que si cette série converge, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(1pt) **Question de cours 2.** Énoncer le critère de comparaison série-intégrale.

(2pts) **Question de cours 3.** Montrer que si les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes en $+\infty$ et que l'une de ces deux suites est de signe constant, alors les séries Σa_n et Σb_n sont de même nature.

Exercice 1

(2pts) **1.** Montrer que pour tout $i \geq 3$, $\frac{\pi^i}{i!} \leq \frac{\pi^3}{6}(\frac{\pi}{4})^{i-3}$, puis montrer que pour tout $i \geq 0$,

$$\frac{\pi^i}{i!} \leq \frac{32}{3}(\frac{\pi}{4})^i. \qquad (*)$$

En déduire que la série $\sum \frac{\pi^i}{i!}$ converge et donner un majorant de sa somme $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\pi^i}{i!}$.

(1pt) **2.** Montrer d'une autre façon que la série $\sum \frac{\pi^i}{i!}$ converge.

(2pts) **3.** En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, et à nouveau la majoration $(*)$, montrer que $e^\pi = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\pi^i}{i!}$.

Exercice 2

(1pt) **1.** Montrer que pour tout x dans un voisinage de $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = (\frac{\pi}{2} - x)u(x)$, avec $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} u(x) = 1$.

(1pt) **2.** En déduire que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\tan(x) = \frac{\mu(x)}{\frac{\pi}{2} - x}$, où μ est une fonction vérifiant $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \mu(x) = 1$.

(2pts) **3.** Montrer à l'aide de la question précédente que $\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x) = \frac{\nu(x)}{x}$ où ν est une fonction telle que $\lim_{x\to+\infty} \nu(x) = 1$.

Touner la page ↪

(1pt) **4.** Calculer la dérivée de $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \text{Arctan}(\log(x))$.

(2pts) **5.** Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n(1+\log^2(n))}$ est convergente de trois manières différentes.

(2pts) **6.** À l'aide de la question 3, donner un encadrement du reste d'ordre n de la série $\sum \dfrac{1}{n(1+\log^2(n))}$. En déduire un équivalent de ce reste.

(2pts) **7.** Montrer à l'aide du résultat de la question 5 que la série $\sum \dfrac{1}{n\log^2(n)}$ est convergente. Donner un équivalent du reste de cette série à l'aide de l'équivalent obtenu à la question précédente.