Correction de la seconde session du 2 mars 2017 - MATH321

Exercice 1.

1. La fonction $f : x \mapsto \log(x+1)$ est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$. On en déduit que $\mathrm{DL}_0^1(f)(x) = x$.

2. On a $(1+\frac{y}{n})^n = e^{n\log(1+\frac{y}{n})} \sim_{n\to+\infty} e^{n\cdot\frac{y}{n}} = e^y$, d'après la question précédente. Ce qui montre que $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{y}{n})^n = e^y$.

3. On peut supposer $|y| \geq 1$, car si $|y| < 1$, on a directement $\frac{|y|^n}{n} \leq |y|^n \to_{n\to+\infty} 0$.
De l'égalité

$$\frac{|y|^n}{n!} = \frac{|y|^Y}{1\cdot 2\cdot 3\cdots Y}\cdot\frac{|y|^{n-Y}}{(Y+1)(Y+2)\cdots n}$$

on tire alors , en notant $C = \frac{|y|^Y}{1\cdot 2\cdot 3\cdots Y}$ et $\alpha = |y|/(Y+1)$:

$$\frac{|y|^n}{n!} = C\frac{|y|}{(Y+1)}\frac{|y|}{(Y+2)}\cdots\frac{|y|}{n} = C\alpha^{n-Y}.$$

Or comme C est indépendant de n et comme $\alpha \in]0,1[$, on a bien $\lim_{n\to+\infty}\frac{|y|}{n!} = 0$.

4. Pour fixer les idées, supposons que $y > 0$. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour $x \mapsto e^x$, entre 0 et y, donne l'existence de $\theta_n \in]0,y[$

$$e^y = \sum_{k=0}^{n}\frac{y^k}{k!} + \frac{e^{\theta_n}y^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Or d'après la question précédente, $0 \leq \frac{e^{\theta_n}y^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^y\frac{y^{n+1}}{(n+1)!} \to_{n\to+\infty} 0$. Il s'ensuit que $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^n}{n!} = e^y$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n-1$ pour $x \mapsto e^x$, entre 0 et 1, donne l'existence de $\theta_n \in]0,1[$ tel que

$$e = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!} + \frac{e^{\theta_n}}{n!},$$

soit

$$\frac{e^{\theta_n}}{n!} = e - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!},$$

et donc en multipliant par $(n-1)!$ les deux membres de cette dernière inégalité,

$$\frac{e^{\theta_n}}{n} = (n-1)!e - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!}$$

6. Si $e = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente,

$$\frac{qe^{\theta_n}}{n} = (n-1)!p - q\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!},$$

or quel que soit $k \leq n$, $\frac{(n-1)!}{k!} \in \mathbb{N}$, ce qui prouve bien que $t_n \in \mathbb{N}$.

7. La suite d'entiers $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, puisque $\theta_n \in]0,1[$. Or ceci ne se peut que si cette suite est égale à 0 à partir d'un certain rang. Mais d'autre part puisque $e^{\theta_n} \neq 0$, la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut comporter des termes nuls. En conclusion l'hypothèse $e \in \mathbb{Q}$ était absurde.

Exercice 2.

1. On a $a_n = \dfrac{\log n}{n^2}(1 - \dfrac{\sin n}{n})$ et $(1 - \dfrac{\sin n}{n}) \to_{n\to+\infty} 0$. Donc $a_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{\log n}{n^2}$. D'autre part $n^{1,1}\dfrac{\log n}{n^2} \to_{n\to+\infty} 0$, donc $\sum \dfrac{\log n}{n^2}$ converge d'après le critère de comparaison avec les séries de Riemann. On en conclut que Σa_n converge, d'après le critère des séries de termes positifs équivalents.

2. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{1}{x^3}(1 - 2\log x)$. Donc f est décroissante sur $[e^{1/2}, +\infty[$.

3. Le calcul montre que g est une primitive de f. Comme f est décroissante et positive sur $[e^{1/2}, +\infty[$, le théorème de comparaison série-intégrale montre que le reste ρ_n d'ordre n de la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\log n}{n^2}$ vérifie

$$\lim_{p\to+\infty} \left[g\right]_{n+1}^{p} = \lim_{p\to+\infty} \int_{n+1}^{p} f \leq \rho_n \leq \lim_{p\to+\infty} \int_{n}^{p} f = \lim_{p\to+\infty} \left[g\right]_{n}^{p}.$$

Ce qui donne l'encadrement

$$\frac{\log(n+1)}{n+1} \sim_{n\to+\infty} \frac{\log(n+1)}{n+1} + \frac{1}{n+1} \leq \rho_n \leq \frac{\log n}{n} + \frac{1}{n} \sim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n}.$$

On tire de cet encadrement $\rho_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{\log n}{n}$ (voir la note [1] en bas de page). Mais puisque $a_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{\log n}{n^2}$, on a $R_n \sim_{n\to+\infty} \rho_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{\log n}{n}$.

4. On a $b_n - b_{n+1} = \dfrac{\log n}{n} - \dfrac{\log(n+1)}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)}\big((n+1)\log n - n\log(n+1)\big) = \dfrac{1}{n(n+1)}(\log n - n\log(\dfrac{n+1}{n})) = \dfrac{\log n}{n(n+1)}(1 - \dfrac{n\log(1+\frac{1}{n})}{\log n})$.

Comme $n\log(1+\dfrac{1}{n}) \sim_{n\to+\infty} 1$, on déduit de l'égalité précédente que

$$b_n - b_{n+1} \sim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n(n+1)} \sim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^2}.$$

5. La question précédente montre que les restes d'ordre N des séries de terme général $b_n - b_{n+1}$ et $\dfrac{\log n}{n^2}$ sont équivalents. Or le reste d'ordre N de la série de terme général $(b_n - b_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est $\lim_{P\to+\infty} \sum_{k=0}^{P} b_{N+1+k} - b_{N+2+k} = \lim_{P\to+\infty} b_{N+1} - b_{N+2+P} = b_{N+1} = \dfrac{\log(N+1)}{N+1}$. On en déduit que $R_N(\Sigma a_n) \sim_{n\to+\infty} \dfrac{\log(N+1)}{N+1}$. Mais il est facile de voir que $\dfrac{\log(N+1)}{N+1} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{\log N}{N}$, par les mêmes arguments qu'à la question 4. On retrouve alors bien le résultat de la question 3 : $R_n(\Sigma a_n) \sim_{n\to+\infty} \dfrac{\log n}{n}$.

---

1. En effet, il suffit de remarquer que $\dfrac{\log(n+1)}{n+1}\dfrac{n}{\log n} \to_{n\to+\infty} 1$. Ce qui provient du petit calcul classique suivant $\dfrac{\log(n+1)}{\log n} = \dfrac{\log(n\frac{(n+1)}{n})}{\log n} = 1 + \dfrac{\log(\frac{n+1}{n})}{\log n} \to_{n\to+\infty} 1$.