MATH321 - Devoir 1

Exercice. On considère la suite $u := (u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n).$$

1. Calculer $u_{n+1} - u_n$, $n \geq 1$.

2. En utilisant la concavité de $x \mapsto \log(x)$ et les positions relatives du graphe d'une fonction concave et d'une de ses tangentes (Corollaire 1.3.13 du cours), montrer que u est décroissante.

On considère la suite $v := (v_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$v_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1).$$

3. De la même façon que dans la question précédente, montrer que v est croissante.

4. En déduire que $u_n > v_1 = 1 - \log(2)$, puis que u converge vers une limite $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$. La constante γ est appelée la constante d'Euler.

Problème. Soit $a \in]0,1[$ un nombre réel. Pour tout $n \geq 0$, on construit 2^n intervalles $I_n^1, \cdots I_n^{2^n}$ de la manière suivante.

- Pour $n = 0$, on pose $I_0^1 = [0,1]$.
- Supposons construits $I_n^1, \cdots I_n^{2^n}$, pour $n \geq 0$, et soit $k \in \{1, \cdots, 2^n\}$. On note $I_n^k = [\alpha_{n,k}, \alpha_{n,k+1}]$. On pose alors :

$$I_{n+1}^{2k-1} = [\alpha_{n,k} \ , \ (1-a)\alpha_{n,k} + a\alpha_{n,k+1}]$$
$$\text{et} \ \ I_{n+1}^{2k} = [(1-a)\alpha_{n,k} + a\alpha_{n,k+1} \ , \ \alpha_{n,k+1}].$$

1. On note $\sigma := \max\{a, 1-a\} \in]0,1[$. Montrer, par récurrence sur n, que la longueur d'un intervalle I_n^k est majorée par σ^n, pour $n \geq 0$ et $k \in \{1, \cdots, 2^n\}$.

2. Déduire de la question précédente que si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite telle que

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \geq 0, u_{n+1} \in \{2^{u_n - 1}, 2^{u_n}\},$$

alors $\bigcap_{n\geq 0} I_n^{u_n}$ est un singleton inclus de $[0,1]$.

3. Soit $\lambda \in [0,1]$. Montrer qu'existe une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que

$$u_0 = 1, \ \forall n \geq 0, u_{n+1} \in \{2^{u_n - 1}, 2^{u_n}\} \ \text{ et } \ \{\lambda\} = \bigcap_{n\geq 0} I_n^{u_n}.$$

Noter que ceci équivaut à $\alpha_{n,u_n} \to \lambda$. (Ind. On pourra construire la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par récurrence en utilisant une dichotomie.)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant

$$\forall x, y \in [0,1],\ f((1-a)x + ay) \leq (1-a)f(x) + af(y).$$

On veut montrer que cette condition, apparemment plus faible que la convexité de f, implique la convexité de f.

4. Fixons $x < y$ dans $[0,1]$ et considérons les fonctions F et G définies par

$$F : \begin{array}{ccl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ \lambda & \mapsto & F(\lambda) = f((1-\lambda)x + \lambda y) \end{array}$$

$$G(\lambda) = F(\lambda) - F(0).$$

Montrer que F et G sont continues et vérifient :

$$\forall X, Y \in [0,1],\ F((1-a)X + aY) \leq (1-a)F(X) + aF(Y),$$

$$\forall X, Y \in [0,1],\ G((1-a)X + aY) \leq (1-a)G(X) + aG(Y).$$

5. Montrer que

$$\forall \lambda \in [0,1],\ f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \Longleftrightarrow G(\lambda) \leq \lambda G(1)$$

6. Soit $\lambda \in [0,1]$ et $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite comme construite à la question 3, c'est-à-dire telle que $\forall n \geq 0, u_n \in \{1, \cdots, 2^n\}$ et $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_{n,u_n} = \lambda$. Montrer par récurrence que

$$\forall n \geq 0,\ G(\alpha_{n,u_n}) \leq \alpha_{n,u_n} G(1).$$

7. Conclure de la question précédente que f est convexe.