

MATH321 - Devoir 1

Exercice 1. Soient a, b deux nombres réels vérifiant $a < b$ et soit une $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe non constante. On suppose enfin que $f(a) = f(b) = m$.

On veut montrer que $\forall x \in]a, b[, f(x) < m$.

1. Montrer que dans le but de montrer que $\forall x \in]a, b[, f(x) < m$, on peut supposer sans perte de généralité que $m = 0$.

On suppose dans la suite que $m = 0$.

2. Montrer que $\forall x \in [a, b], f(x) \leq 0$

3. En raisonnant par l'absurde, montrer finalement que $\forall x \in]a, b[, f(x) < 0$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une application décroissante de classe C^1 , convexe et telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. On veut montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

1. Montrer que f' admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$. On appelle ℓ cette limite.

3. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\ell = 0$.