MATH321 - Devoir 2

Problème 1. Soit n un entier naturel non nul. On note d_n le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}$. On veut étudier μ_N, le nombre moyen de diviseurs des entiers compris entre 1 et $N \in \mathbb{N}^*$, ce nombre moyen étant défini par

$$\mu_N := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} d_n.$$

Pour cela, on note $D_N := \sum_{n=1}^{N} d_n$ et pour tout ensemble fini X, on note $\#X$ le cardinal de X, c'est-à-dire le nombre d'éléments de X. Enfin, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{E}(x)$ la partie entière de x, c'est-à-dire l'unique entier $\mathrm{E}(x)$ tel que

$$x - 1 < \mathrm{E}(x) \leq x. \qquad (*)$$

1. Calculer μ_{13}.

2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

2.a Montrer que pour tout $n \leq N$, $d_n = \#\{(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*; ab = n\}$. En déduire que

$$D_N = \#\{(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*; ab \leq N\}.$$

2.b Soit $0 < a \leq N$. Montrer que $\#\{b \in \mathbb{N}^*; ab \leq N\} = \mathrm{E}(\frac{N}{a})$. En déduire que

$$D_N = \sum_{a=1}^{N} \mathrm{E}(\frac{N}{a}).$$

3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer, à l'aide de l'encadrement $(*)$, que

$$N\sum_{a=1}^{N}\frac{1}{a} - N \leq D_N \leq N\sum_{a=1}^{N}\frac{1}{a}.$$

En conclure que

$$\mu_N \sim_{+\infty} \log(N).$$

4. Montrer que pour tout $a, b, N \in \mathbb{N}$,

$$ab \leq N \iff (a \leq \sqrt{N} \text{ ou } b \leq \sqrt{N}) \text{ et } ab \leq N.$$

En déduire que

$$\begin{aligned} D_N &= \#\{(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*; ab \leq N\} \\ &= 2\#\{(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*; a \leq \sqrt{N} \text{ et } ab \leq N\} - \#\{(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*; a \leq \sqrt{N} \text{ et } b \leq \sqrt{N}\}. \end{aligned}$$

5. Montrer grâce à la question 2.b que

$$D_N = 2\sum_{a=1}^{E(\sqrt{N})} \mathrm{E}(\frac{N}{a}) - (\mathrm{E}(\sqrt{N}))^2.$$

En déduire, à nouveau grâce à l'encadrement $(*)$, que

$$D_N = 2\sum_{a=1}^{E(\sqrt{N})} \frac{N}{a} - N + O(\sqrt{N}).$$

6. En conclure que

$$\mu_N = \log(N) + 2\gamma - 1 + O(\frac{1}{\sqrt{N}}).$$

Cette égalité est-elle plus précise que l'équivalence de la question 3 ? En négligeant le reste en $O(\frac{1}{\sqrt{N}})$ pour $N = 10^9$ (ce que rien ne justifie ici), donner une valeur approchée du nombre moyen de diviseurs du premier milliard d'entiers.

Problème 2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par, pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}).$$

1. Montrer que f est continue sur $[0,1]$, décroissante et que $\displaystyle\int_{[0,1]} f(t)\, dt = \frac{\pi}{4}$.

2. Montrer par des raisonnements portant sur les aires sous le graphe de f et sur celles que calculent les quantités a_n et b_n, que pour tout $n \geq 1$,

$$a_n \leq \frac{\pi}{4} \leq b_n.$$

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $\forall n \geq 1, u_n = a_{2^n}$ et $v_n = b_{2^n}$.

3. Montrer que pour tout $p \geq 1$, pour tout $k \in \{1, \cdots, p\}$,

$$\frac{1}{2p}[f(\frac{2k-1}{2p}) + f(\frac{2k}{2p})] \geq \frac{1}{p} f(\frac{k}{p}).$$

En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante. De même montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $v_n - u_n = \frac{1}{2^{n+1}}$. En conclure que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = \dfrac{\pi}{4}$ et donner un rationnel q tel que $|\pi - q| \leq 10^{-1}$.

On veut à nouveau estimer la rapidité de convergence de u_n vers $\frac{\pi}{4}$. On considère pour cela la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $c_n = u_n - u_{n-1}$, $n \geq 2$ et $c_1 = u_1$.

5. Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que, $p \geq 1$, pour tout $k \in \{1, \cdots, p\}$,

$$f(\frac{2k-1}{2p}) - f(\frac{2k}{2p}) \leq \frac{1}{4p}.$$

En déduire que

$$\forall n \geq 2, \quad 0 \leq c_n \leq \frac{1}{2^{n+2}}.$$

6. On note, pour $n \geq 2$, par R_n le reste de la série Σc_n. Montrer, à l'aide de la question précédente, que

$$\forall n \geq 2, \quad 0 \leq R_n = \frac{\pi}{4} - u_n = \sum_{i=n+1}^{+\infty} c_i \leq \frac{1}{2^{n+2}}.$$