MATH321 - Devoir 2

Problème

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels où $a_1, a_2, \cdots$ sont tous non nuls. La donnée d'une telle suite permet d'en considérer une nouvelle, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dite *fraction continue associée à* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$c_0 = a_0,\ c_1 = a_0 + \frac{1}{a_1},\ c_2 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}, \cdots,\ c_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

On note plus commodément dans la suite les termes c_n de la fraction continue $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $[a_0, a_1, \cdots, a_n]$[1]. Les termes a_n de la suite initiale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'appellent *les quotients partiels (d'ordre n) de la fraction continue.*

Dans la suite du problème on suppose que pour tout $n \geq 0$, $a_n > 0$.

PARTIE I

I.1. En remarquant que $[a_0, \cdots, a_n, a_{n+1}]$ se calcule comme $[a_0, \cdots, a_{n-1}, a_n]$, mais avec $a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}$ à la place de a_n, montrer par récurrence qu'en posant $p_{-2} = 0, q_{-2} = 1, p_{-1} = 1, q_{-1} = 0$, et pour tout $n \geq 0$

$$\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases}$$

on a

$$\forall n \geq 0, \quad q_n \neq 0 \ \text{ et } \ \frac{p_n}{q_n} = c_n.$$

On suppose dans tout le reste du problème que les nombres $a_n \in \mathbb{N}^*$[2]. Il s'ensuit que pour tout n, $c_n \in \mathbb{Q}_+$.

I.2. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$ et que pour tout $n \geq 1$, $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n$. En déduire que $p_n \wedge q_n = 1$, pour tout $n \geq 1$. La fraction $\dfrac{p_n}{q_n}$ est donc irréductible.

On dit que $\dfrac{p_n}{q_n}$ est *la réduite d'ordre n de la fraction continue* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

---

1. Parfois la notation $a_0 + \dfrac{1}{a_1+} \dfrac{1}{a_2+} \cdots \dfrac{1}{a_n}$ est aussi adoptée dans la littérature.
2. On pourrait cependant sans changement dans ce qui suit supposer que $a_0 \in \mathbb{Z}$.

I.3. Montrer que la suite des dénominateurs $q_1, q_2, \cdots$ des réduites est strictement croissante et que pour tout $n \geq 2$

$$\begin{cases} \dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}} \\ \\ \dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \dfrac{(-1)^n a_n}{q_n q_{n-2}} \end{cases}$$

I.4. Montrer que les suites $(\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}})_{n\geq 1}$ et $(\dfrac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}})_{n\geq 1}$ sont adjacentes. On note alors $[a_0, a_1, a_2, \cdots]$ la limite de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

PARTIE II

Rappelons que la partie entière d'un nombre réel x est l'unique entier $\lfloor x \rfloor$ tel que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ et que la partie fractionnaire de x est alors $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Étant donné un réel $\xi \geq 0$, on lui associe les suites (a_n) et (ξ_n) suivantes (qui sont éventuellement finies) définies par récurrence par :

$$\xi_0 = \xi,\ a_0 = \lfloor \xi_0 \rfloor,\ \xi_{n+1} = \frac{1}{\{\xi_n\}} \text{ et } a_{n+1} = \lfloor \xi_{n+1} \rfloor \text{ si } \xi_n \notin \mathbb{N}. \tag{$*$}$$

Ces deux suites donc finies si et seulement si pour un certain entier $N \in \mathbb{N}$, $\xi_N \in \mathbb{N}$.

II.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour lequel ξ_{n+1} est défini,

$$\xi = [a_0, a_1, \cdots, a_n, \xi_{n+1}].$$

II.2. On suppose dans cette question que $\xi \in \mathbb{Q}_+$ et que $\xi = \dfrac{p}{q}$, avec $p \wedge q = 1$. On applique à p et q l'algorithme d'Euclide calculant le pgcd de p et q : on effectue la division de p par q, de quotient α_0 et de reste r_0, puis la division de q par r_0, de quotient α_1 et de reste r_1 etc... jusqu'à obtenir à la N ième division (l'entier N dépendant de p et q) le reste $r_{N-1} = 1 = \text{pgcd}(p, q)$:

$$\begin{cases} p = q\alpha_0 + r_0, & 0 < r_0 < q \\ q = r_0\alpha_1 + r_1, & 0 < r_1 < r_0 \\ \vdots & \\ r_{N-3} = r_{N-2}\alpha_{N-1} + 1 & \end{cases}$$

Montrer que $\dfrac{p}{q} = [\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{N-1}, r_{N-2}]$.

II.3. Déduire des deux questions précédentes que les suites (ξ_n) et (a_n) associées au réel ξ par $(*)$ sont infinies si et seulement si ξ est irrationnel (on pourra montrer que si $\xi = p/q$ est rationnel, alors $\xi_N = r_{N-2}$).

On suppose à partir de maintenant que $\xi \notin \mathbb{Q}$, et donc que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à ξ est infinie.

II.4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) := [a_0, \cdots, a_{n-1}, x]$. Montrer, en utilisant le théorème des fonctions composées monotones, que f_n est croissante si n est pair et décroissante si n est impair.

II.5. En remarquant que $\xi_n \geq a_n$, montrer que pour tout $k \geq 1$,

$$\xi = f_{2k}(\xi_{2k}) \geq f_{2k}(a_{2k}) = c_{2k},$$

$$\xi = f_{2k-1}(\xi_{2k-1}) \leq f_{2k-1}(a_{2k-1}) = c_{2k-1}.$$

Autrement dit, ξ est compris entre deux réduites quelconques consécutives de la fraction continue construite sur la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à ξ par $(*)$. En conclure à l'aide de la question I.3 que

$$|\xi - c_n| \leq \frac{1}{q_n^2},$$

et en particulier que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ξ.

II.6. Montrer qu'étant donné un réel $\xi \geq 0$, $\xi \notin \mathbb{Q}$, il existe une infinité de rationnels $\dfrac{p}{q}$ tels que[3]

$$|\xi - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2}.$$

PARTIE III

III.1. Dans cette question $\xi = \sqrt{2}$. On cherche la fraction continue associée à $\sqrt{2}$ par $(*)$. Comme on a $\lfloor\sqrt{2}\rfloor = 1$, on a

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\xi_1}.$$

III.1.a Montrer que $\xi_1 = 1 + \sqrt{2}$ et en déduire que $a_1 = 2$ et $\xi_2 = \xi_1$. En conclure que $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \cdots]$.

III.1.b Calculer alors la réduite d'ordre 4 de $[1, 2, 2, 2, \cdots]$ et en déduire une approximation de $\sqrt{2}$ par un rationnel à une erreur que l'on donnera.

III.2. Dans cette question ξ est la solution positive de l'équation $x = 1 + \dfrac{1}{x}$. Calculer ξ. Déduire de $x = 1 + \dfrac{1}{x}$ la fraction continue associée à ξ par $(*)$, puis donner une approximation de ξ à 10^{-4} près.

III.3. À l'aide d'une calculatrice et de cette méthode, donner une approximation de π par un rationnel à 10^{-9} près.

---

3. Remarquons que plus le réel positif τ est grand, meilleure est l'approximation de ξ par le rationnel p/q vérifiant $|\xi - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^\tau}$. La question II.5 assure que l'on peut approximer n'importe quel irrationnel par une suite de rationnels avec $\tau = 2$. Cependant en général, on ne peut pas faire mieux : le théorème de K. Roth montre que si ξ est un *nombre algébrique* (ie racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers) non rationnel, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il n'existe qu'un nombre fini de rationnels p/q tels que $|\xi - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$. Il s'ensuit en particulier que si l'on peut approcher indéfiniment un nombre réel $\xi \notin \mathbb{Q}$ à un ordre $\tau > 2$, ξ n'est pas algébrique (un nombre non algébrique est dit *transcendant*). K. Roth a obtenu la médaille Fields en 1958 pour ce résultat.