MATH321 - Contrôle continu du 13 octobre 2016

(2pts) **Questions de cours 1.** Énoncer le théorème de l'inégalité des pentes.

(2pts) **Questions de cours 2.** Trouver un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ de longueur maximale tel que la restriction à I de la fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit concave (on justifiera la concavité de $\sin_{|I}$ ainsi que la maximalité de la longueur de I).

Exercice 1. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction.

(2pts) **1.** Montrer que la fonction $\log : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est concave.

(2pts) **2.** Déduire de la question précédente que si $\log \circ f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, alors f est convexe.

(2pts) **3.** On suppose que $\log \circ f$ est convexe. Soit $C > 0$. On rappelle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, on note x^y le réel $e^{y \log(x)}$.

Montrer que $x \mapsto \log(C^x f(x))$ est la somme de deux fonctions convexes. En déduire que $C^x f(x)$ est convexe.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On note, pour $m \in \mathbb{R}$, $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_m(x) = f(x) + mx$.

1. On suppose dans cette question que f est convexe. Soit alors $m \in \mathbb{R}$.

(2pts) **1.a.** Montrer que f_m est convexe.

(2pts) **1.b.** Justifier sans preuve mais à l'aide de théorèmes que f_m est bornée sur n'importe quel intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et que f_m atteint sa borne supérieure sur cet intervalle (c'est-à-dire qu'existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $\forall x \in [a, b],\ f_m(x) \leq f_m(\alpha)$).

(2pts) **1.c.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On note $M = \max\{f_m(a), f_m(b)\}$. En utilisant la question 1.a, montrer que la borne supérieure de f_m sur $[a, b]$ est atteinte en a ou en b.

2. On suppose dans cette question que pour tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et pour tout $m \in \mathbb{R}$, f_m atteint sa borne supérieure en a ou en b.

(2pts) **2.a.** Soient $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. On pose $m = -\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Calculer $f_m(a)$ et $f_m(b)$.

(2pts) **2.b.** À l'aide de l'hypothèse « *f_m atteint sa borne supérieure sur $[a, b]$ en a ou en b* », montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.