MATH321 - Contrôle continu du 7 octobre 2015

(2pts) **Questions de cours 1.** Soit $n \geq 1$. Donner la définition d'un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ puis la définition d'une fonction convexe $f : C \to \mathbb{R}$ définie sur un ensemble convexe $C \subset \mathbb{R}^n$.

(2pts) **Questions de cours 2.** Trouver un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ de longueur maximale tel que la restriction à I de la fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit convexe (on justifiera la convexité de $\sin_{|I}$).

Exercice. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\mathcal{E}$ l'ellipsoïde de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\mathcal{E} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \leq 1\}.$$

(1pt) **1.** Représenter $\mathcal{E}$.

(2pts) **2.** Montrer en utlisant l'inégalité de Minkowski que

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$$

est un ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$.

(2pts) **3.** Montrer que si $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une application linéaire, l'image par ℓ d'un convexe de $\mathbb{R}^2$ est un convexe de $\mathbb{R}^2$.

(2pts) **4.** À l'aide des questions 2 et 3, montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$.

Soient $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$ et $\alpha : [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[c, d]$, deux fois dérivable sur $]c, d[$ et telle que pour tout $z \in]c, d[$, $\alpha''(z) \geq 0$.

(2pts) **5.** Justifier à l'aide d'énoncés du cours que pour tout $x \in]c, d[$, la fonction

$$p_x :]c, d[\setminus \{x\} \to \mathbb{R} \ \text{ définie par } \quad p_x(y) = \frac{\alpha(y) - \alpha(x)}{y - x}$$

est croissante.

(2pts) **6.** En utilisant la question 5 et la continuité de α en c et d, montrer que

6.a. la fonction $p_c :]c, d] \to \mathbb{R}$ est croissante,
6.b. la fonction $p_d : [c, d[\to \mathbb{R}$ est croissante,
6.c. pour tout $x \in]c, d[$, la fonction $p_x : [c, d] \setminus \{x\} \to \mathbb{R}$ est croissante.

(1pt) **7.** Conclure des questions 5 et 6 que α est convexe sur $[c, d]$.

(3pts) **8.** Retrouver la conclusion de la question 7, en montrant directement à partir de la définition de la convexité que si une fonction $\alpha : [c, d] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[c, d]$ et convexe sur $]c, d[$, alors α est convexe sur $[c, d]$.

(3pts) **9.** En appliquant la conclusion de la question 7 à la fonction $\alpha : [-\sqrt{a}, \sqrt{a}] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [-\sqrt{a}, \sqrt{a}],\ \alpha(x) = -\sqrt{b - \frac{b}{a}x^2},$$

montrer à nouveau que $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$.