MATH321 - Examen du 12 novembre 2014

(2pts) **Questions de cours 1.** Soient $a \in \mathbb{R}$, V un voisinage de a et $f : V \to \mathbb{R}$ et $g : V \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Donner les définitions de « f est négligeable devant g au voisinage de a » et « f et g sont équivalentes au voisinage de a ».

(2pts) **Questions de cours 2.** Soient $a \in \mathbb{R}$, V un voisinage de a et $f : V \to \mathbb{R}$, $g : V \to \mathbb{R}$, $\varphi_1 : V \to \mathbb{R}$ et $\varphi_2 : V \to \mathbb{R}$ quatre fonctions telles que $f \sim_a \varphi_1$ et $g \sim_a \varphi_2$. Est-il toujours vrai qu'alors $f + g \sim_a \varphi_1 + \varphi_2$? (faire une preuve si la réponse est positive et donner un contre-exemple si la réponse est négative).

(2pts) **Questions de cours 3.** Donner la définition d'une échelle de comparaison asymptotique $(g_i)_{i\in I}$ en un point $a \in \mathbb{R}$. Donner ensuite la définition de « la fonction f possède un développement limité en a à l'ordre $N \in \mathbb{N}$ ».

(2pts) **Questions de cours 4.** Est-il vrai qu'une fonction qui admet un développement limité en un point $a \in \mathbb{R}$ à l'ordre 2 est deux fois dérivable en ce point ? (faire une preuve si la réponse est positive et donner un contre-exemple si la réponse est négative).

(2pts) **Exercice 1.** Donner s'il existe le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto \log(\frac{\sin x}{x})$.

Exercice 2.

(2pts) **1.** Donner le développement limité au voisinage de $+\infty$ de $(1 + \frac{1}{x})^x$.

(2pts) **2.** En déduire $\lim_{x\to+\infty} \left[e - (1 + \frac{1}{x})^x\right]^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 3. Soient $b > 0$ un réel et $f : [0, b] \to [0, b]$ une fonction admettant le développement limité $f(x) = x - ax^p + o(x^p)$ à l'ordre $p > 1$, où $a > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de $u_0 \in [0, a]$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n),\ \forall n \geq 0. \qquad (*)$$

(2pts) **1.** Montrer, par récurrence sur l'entier n, que si u_0 est choisi suffisamment proche de 0, alors

$$\forall n \geq 0,\ f(u_n) - u_n < 0.$$

En déduire que si u_0 est choisi suffisamment proche de 0, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puis qu'elle converge.

(2pts) **2.** Montrer que si u_0 est choisi suffisamment proche de 0, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(2pts) **3.** Montrer que

$$f^{1-p}(x) - x^{1-p} \sim_0 a(p-1),$$

puis que

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1}^{1-p} - u_n^{1-p} = a(p-1).$$

(2pts) **4.** En appliquant à la question précédente le résultat suivant :

« Si une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors la suite $(w_n = \dfrac{v_0+\cdots+v_n}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ. »

montrer que

$$u_n \sim_{+\infty} (na(p-1))^{\frac{1}{1-p}}.$$

(1pt) **5.** Déduire de la question précédente que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $(*)$ lorsque $f = \sin$ vérifie :

$$u_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{3}{n}}.$$