MATH321 - Examen du 26 février 2015

La correction tiendra grandement compte de la qualité de l'expression. Toutes les questions valent le même nombre de points.

Questions de cours 1. Donner la définition d'un ensemble convexe.

Questions de cours 2. Donner la définition d'une série alternée et montrer qu'une telle série converge.

Questions de cours 3. Énoncer la règle de D'Alembert et prouvez-la.

Questions de cours 4. Montrer que l'on ne change pas la nature d'une série en changeant un nombre fini de ses termes.

Exercice 1. Soit $x \in [0,1]$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_n = (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$, pour tout $n \geq 1$.

1. Montrer que la série Σa_n converge. Cette série est-elle absolument convergente ?

2. Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(y) = \log(y)$. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $\theta \in [x, x+1]$, $|\frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}| \leq \frac{1}{nx^n}$. En conclure, à l'aide du théorème de Taylor-Lagrange, que $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = \log(x+1)$.

3. Trouver, à l'aide de ce qui précède, un rationnel q tel que $|\log(2) - q| < 10^{-67}$.

Exercice 2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \geq 1,\ a_n = \frac{\sin(\log(n))}{n},$$

et S_n la somme partielle d'ordre n de la série Σa_n. Pour $k \in \mathbb{N}$ on note

$$N_k := \{n \in \mathbb{N}\ ;\ e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi} \leq n \leq e^{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}\},\ n_k := \min N_k \quad \text{et} \quad m_k := \max N_k.$$

1. Montrer que

$$S_{m_k} - S_{n_k-1} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=n_k}^{m_k}\frac{1}{n}.$$

2. Après avoir comparé $1/n$ et $\int_n^{n+1}\frac{dx}{x}$, montrer que

$$S_{m_k} - S_{n_k-1} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\log(\frac{m_k+1}{n_k}).$$

3. Montrer que $n_k \leq e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi+1}$. En déduire que

$$S_{m_k} - S_{n_k-1} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{2} - 1).$$

4. La série Σa_n converge-t-elle ?