MATH321 - Examen du 4 janvier 2017

(1pt) **Question de cours 1.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Donner la définition de la convergence de la série Σa_n.

(1pt) **Question de cours 2.** La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ converge-t-elle ? (justifier votre réponse par une preuve).

(2pts) **Question de cours 3.** Montrer que si une série numérique est absolument convergente, elle est convergente. La réciproque est-elle vraie (justifier votre réponse d'une preuve ou d'un contre exemple) ?

Exercice 1

(1pt) **1.** La série de terme général $a_n = \frac{\log^2 n}{n^{3/2}}$ est-elle convergente ?

(2pts) **2.** La série de terme général $a_n = \frac{(-1)^n \log n}{n}$ est-elle absolument convergente ? Est-elle convergente ?

Exercice 2

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \geq 1,\ a_n = \frac{\log^2 n}{n}$.

(1pt) **1.** Montrer que la série $\sum a_n$ est divergente.

(1pt) **2.** Montrer que la fonction $x \mapsto f(x) = \frac{\log^2 x}{x}$ est décroissante sur un intervalle du type $]\alpha, +\infty[$, pour un certain $\alpha > 0$.

(2pts) **3.** À l'aide de la question précédente, montrer que la somme partielle S_n d'ordre n de $\sum a_n$ est telle que $S_n \sim_{n\to+\infty} \frac{\log^3 n}{3}$.

Exercice 3

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $q \in]-1, 1[$. On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = n^p q^n.$$

(1pt) **1.** Montrer que la suite $b_n = n^p |q|^{\frac{n}{2}}$ tend vers 0. En déduire que cette suite est bornée.

(1pt) **2.** Montrer à l'aide de la question précédente que la série Σa_n est absolument convergente.

(1pt) **3.** Retrouver à l'aide de la règle de D'Alembert le résultat de la question 2.

Le réel $q \in]-1,1[$ étant fixé, pour tout $p, N \in \mathbb{N}$, on note

$$S_N(p) = \sum_{n=0}^{N} n^p q^n \quad \text{et } \sigma(p) := \sum_{n=0}^{+\infty} n^p q^n.$$

(1pt) **4.** Calculer $\sigma(0)$.

(2pts) **5.** Soit $N \geq 0$. À l'aide de la formule du binôme, développer $\sum_{n=0}^{N} (n+1)^p q^{n+1}$ et en déduire $S_N(p)$ en fonction de $S_N(p-1), S_N(p-2), \cdots, S_N(1), S_N(0)$.

(2pts) **6.** Déduire de la question précédente $\sigma(p)$ en fonction de $\sigma(p-1), \sigma(p-2), \cdots, \sigma(1), \sigma(0)$.

(2pts) **7.** Calculer $\sigma(1)$, puis $\sigma(2)$, puis $\sigma(3)$.

Correction

Exercice 1.

1. On a $\lim_{n\to+\infty} n^{1,1} a_n = 0$, donc Σa_n converge d'après le critère de Riemann pour les séries.

2. On a $|a_n| \geq \frac{1}{n}$. donc d'après le critère de comparaison des séries de termes positifs la série $\Sigma |a_n|$ diverge. En revanche la fonction $f(x) = \frac{\log x}{x}$ a pour dérivée $f'(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \log x)$ qui est négative pour $x \geq e$. Il s'ensuit que la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ est décroissante. Comme d'autre part $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, le critère des séries alternées assure que Σa_n converge.

En conclusion la série Σa_n est semi-convergente.

Exercice 2.

1. On a $|a_n| \geq \frac{1}{n}$. donc d'après le critère de comparaison des séries de termes positifs, la série $\Sigma |a_n|$ diverge.

2. La fonction $f(x) = \frac{\log^2 x}{x}$ a pour dérivée $f'(x) = \frac{\log x}{x^2}(2 - \log x)$ qui est négative pour $x \geq e^2$. La fonction f est donc décroissante sur $[e^2, +\infty[$.

3. Comme $a_n = f(n)$ et que la fonction f est décroissante sur $[e^2, +\infty[$, la règle de comparaison série-intégrale montre que $S_n \sim_{n\to+\infty} \int_1^n f = [\frac{\log^3 x}{3}]_1^n = \frac{\log n}{3}$.

Exercice 3.

1. Puisque $|q| < 1$, on a $b_n = e^{p \log n} e^{\frac{n}{2} \log |q|} = e^{p \log n - \frac{n}{2} |\log |q||} \to_{n\to+\infty} 0$. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente, elle est bornée, disons par $C \in \mathbb{R}$.

2. On $|a_n| = b_n |q|^{\frac{n}{2}} \leq C\sqrt{|q|}^n$. Or puisque $\sqrt{|q|} < 1$, la série de terme général $\sqrt{|q|}^n$ converge (il s'agit de la série géométrique de raison $\sqrt{|q|}$), et le critère de comparaison des séries montre alors que $\Sigma |a_n|$ converge. En particulier la série Σa_n converge.

3. On a $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |q|(\dfrac{n+1}{n})^p \to_{n\to+\infty} |q| < 1$. La règle de D'Alembert montre à nouveau que Σa_n est absolument convergente.

4. $\sigma(0)$ est la somme de la série géométrique de raison q, donc $\sigma(0) = \dfrac{1}{1-q}$.

5. On a $(n+1)^p = n^p + \binom{p-1}{p} n^{p-1} + \cdots + \binom{1}{p} n + 1$ de sorte que

$$S_{N+1}(p) = \sum_{n=0}^{N} (n+1)^p q^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{N} n^p q^{n+1} + \binom{p-1}{p} \sum_{n=0}^{N} n^{p-1} q^{n+1} + \cdots + \binom{1}{p} \sum_{n=0}^{N} n q^{n+1} + \sum_{n=0}^{N} q^{n+1} \\
&= q \sum_{n=0}^{N} n^p q^n + q\binom{p-1}{p} \sum_{n=0}^{N} n^{p-1} q^n + \cdots + q\binom{1}{p} \sum_{n=0}^{N} n q^n + q \sum_{n=0}^{N} q^n \\
&= qS_N(p) + q\binom{p-1}{p} S_N(p-1) + \cdots + q\binom{1}{p} S_N(1) + qS_N(0).
\end{aligned}$$

Comme d'autre part $S_{N+1}(p) = S_N(p) + a_{N+1}$, on obtient

$$S_N(p) + a_{N+1} = qS_N(p) + q\binom{p-1}{p} S_N(p-1) + \cdots + q\binom{1}{p} S_N(1) + qS_N(0).$$

Et donc

$$S_N(p) = \frac{-a_{N+1}}{1-q} + \frac{q}{1-q}\Big(\binom{p-1}{p} S_N(p-1) + \cdots + \binom{1}{p} S_N(1) + S_N(0)\Big).$$

6. En faisant tendre N vers $+\infty$, puisque $a_{N+1} \to 0$, on obtient finalement

$$\sigma(p) = \frac{q}{1-q}\Big(\binom{p-1}{p}\sigma(p-1) + \cdots + \binom{1}{p}\sigma(1) + \sigma(0)\Big).$$

7. La formule précédente donne pour $p = 1$:

$$\sigma(1) = \frac{q}{1-q}\sigma(0) = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

La même formule pour $p = 2$ donne :

$$\sigma(2) = \frac{q}{1-q}\Big(2\sigma(1) + \sigma(0)\Big) = \frac{q}{1-q}\Big(\frac{2q}{(1-q)^2} + \frac{1}{1-q}\Big) = \frac{q(q+1)}{(1-q)^3}$$

Enfin pour $p = 3$, on obtient :

$$\sigma(3) = \frac{q}{1-q}\Big(3\sigma(2)+3\sigma(1)+\sigma(0)\Big) = \frac{q}{1-q}\Big(\frac{3q(q+1)}{(1-q)^3} + \frac{3q}{(1-q)^2} + \frac{1}{1-q}\Big) = \frac{q^2+4q+1}{(1-q)^4}.$$