MATH321 - Seconde session - 2 mars 2017

(1pt) **Question de cours 1.** Énoncer le théorème de l'inégalité des pentes.

(1pt) **Question de cours 2.** Donner la définition d'une échelle de comparaison asymptotique.

(1pt) **Question de cours 3.** Énoncer le théorème des séries alternées.

Exercice 1. Le but des questions 1 à 4 de cet exercice est de caractériser le nombre e en tant que limite de suite ou somme de série. Le but des questions 5 à 7 est de montrer que $e \notin \mathbb{Q}$.

(1pt) **1.** Donner un DL_0^1 de la fonction $x \mapsto \log(1+x)$.

(1pt) **2.** Déduire de la question précédente que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{y}{n}\right)^n = e^y$.

(1pt) **3.** Soit $y \in \mathbb{R}$ et Y la partie entière de $|y|$. En remarquant que lorsque $|y| \geq 1$, pour tout $n \geq Y$, on a

$$\frac{|y|^n}{n!} = \frac{|y|^Y}{1\cdot 2\cdot 3\cdots Y}\cdot\frac{|y|^{n-Y}}{(Y+1)(Y+2)\cdots n},$$

montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|y|^n}{n!} = 0$.

(2pts) **4.** Soit $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour $x \mapsto e^x$ sur un intervalle d'extrémités 0 et y. En déduire que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!} = e^y$.

(1pt) **5.** À l'aide de la formule de Taylor-Lagrange entre 0 et 1, montrer que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\theta_n \in]0,1[$ tel que

$$\frac{e^{\theta_n}}{n} = (n-1)!e - \frac{(n-1)!}{1!} - \frac{(n-1)!}{2!} - \cdots - \frac{(n-1)!}{(n-1)!} \qquad (*)$$

(1pt) **6.** Supposons que $e \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire qu'existent des entiers $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $e = p/q$. Déduire de l'égalité $(*)$ que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n := \frac{qe^{\theta_n}}{n}$ est un entier.

(2pts) **7.** On continue de supposer, comme à la question précédente, que $e \in \mathbb{Q}$. En remarquant que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$, déduire de la question précédente que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang. En déduire alors que l'hypothèse $e \in \mathbb{Q}$ est absurde.

Exercice 2. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $\forall n \geq 1,\ a_n = \frac{n - \sin n}{n^3}\log n$.

(2pts) **1.** Montrer que $a_n \sim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^2}$, puis que Σa_n est convergente.

(1pt) **2.** Soit $f : x \mapsto \frac{\log x}{x^2}$. Montrer qu'existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que f est décroissante sur un intervalle $[\alpha, +\infty[$.

(2pts) **3.** Soit $g : x \mapsto -\dfrac{1+\log x}{x}$. Calculer g' et à l'aide de la question précédente donner un encadrement, puis un équivalent du reste $R_n(\Sigma a_n)$ d'ordre n de Σa_n.

(2pts) **4.** Soit $b_n = \dfrac{\log n}{n}$, $n \geq 1$. Montrer que $b_n - b_{n+1} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{\log n}{n^2}$.

(2pts) **5.** Retrouver le résultat de la question 3 à l'aide de la question précédente.