Corrigé du contrôle de MATH401 - 16 mai 2018

Questions subsidiaires hors barème de l'Exercice 1.

4. Montrer à l'aide de (1) et (2) que pour tout $x > 1$

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}.$$

En déduire un équivalent de ζ en 1^+ et en $+\infty$.

5. Soit Σg_n la série de fonctions définie par

$$g_n(x) := \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

Montrer que $g_n : [1, 2] \to \mathbb{R}$ est continue.

Montrer que pour tout $x > 1$, la série numérique $\Sigma g_n(x)$ converge et que sa somme $g(x)$ vérifie

$$g(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \zeta(x) - \frac{1}{x-1}.$$

6. Déduire de l'encadrement (1) que pour tout $x > 0$, pour tout $n \geq 1$

$$0 \leq g_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} = x \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}}.$$

En déduire que pour tout $x \in [1, 2]$, pour tout entier $n \geq 1$,

$$0 \leq g_n(x) \leq 2 \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2},$$

et que la série de fonctions Σg_n est normalement convergente sur $[1, 2]$.

7. Conclure de la question précédente que g est continue sur $[1, 2]$ et que

$$\lim_{x \to 1^+} \zeta(x) - \frac{1}{x-1} = g(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(1) = \gamma.$$

Exercice 1

Question 1. Quel que soit $x > 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante, de sorte que pour tout $t \in [n, n+1]$, avec $n \geq 1$, on a

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}.$$

En intégrant cette double inégalité sur $[n, n+1]$, on en déduit l'encadrement (1). La première inégalité de (1) donne pour tout $n \geq 2$

$$\frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x},$$

ce qui avec la seconde inégalité de (1) donne bien l'encadrement (2).

Question 2. D'après (2), on a, pour $x > 1$,

$$\sum_{n=2}^{N} f_n(x) \leq \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \frac{1}{1-x}\left[\frac{1}{N^{x-1}} - 1\right] \leq \frac{1}{x-1}.$$

La série numérique $\Sigma f_n(x)$, qui est à terme positif est donc majorée par $\frac{1}{x-1}$ et par conséquent cette série converge.

Toujours d'après (2), on a pour $x \in]0,1]$,

$$\log(n+1) - \log n = \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq \frac{1}{n^x},$$

ce qui montre que

$$\log(N+1) \leq \sum_{n=1}^{N} f_n(x),$$

et donc que pour $x \in]0,1]$, la série $\Sigma f_n(x)$ diverge.

Question 3. Quel que soit $n \geq 1$ la fonction $f_n(x) = e^{-x \log n}$ est $\mathscr{C}^\infty$ et quel que soit $p \geq 1$, quel que soit $x > 0$, $f_n^{(p)}(x) = (-\log n)^p e^{-x \log n} = \frac{(-1)^p \log^p n}{n^x}$.

Quel que soit $x \in [a, +\infty[$, quel que soit $n \geq 1$, on a

$$|f_n^{(p)}(x)| \leq \frac{\log^p n}{n^a}.$$

Or $\frac{\log^p n}{n^a}$ est le terme général d'une série convergente (une série de Bertrand). Il s'ensuit que la série Σf_n est normalement, et donc uniformément, convergente sur $[a, +\infty[$.

On sait alors que ζ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ et que pour tout $p \geq 0$, pour tout $x > 0$,

$$\zeta^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p \log^p n}{n^x}.$$

Question 4. Dans la question 2, on a tiré de (2), la majoration $\sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x) \leq \frac{1}{x-1}$, ce qui en ajoutant 1 membre à membre donne $\zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$. D'autre part, d'après la première inégalité de (2)

$$\frac{1}{x-1}\left(1 - \frac{1}{N^{x-1}}\right) = \frac{1}{1-x}\left[\frac{1}{t^{x-1}}\right]_1^N = \int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq \sum_{n=1}^{N} f_n(x),$$

ce qui par passage à la limite donne

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x).$$

On en déduit que $\zeta(x) \sim_{1^+} \frac{1}{x-1}$ et que comme on a toujours $\zeta(x) \geq f_0(x) = 1$, que $\lim_{n \to +\infty} \zeta(x) = 1$.

Question 5. Si $x \in]1, +\infty[$, on a

$$g_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{(n+1)^{x-1}}\right).$$

qui est bien une fonction continue sur $]1, +\infty[$, car $\frac{1}{x-1}$, $\frac{1}{n^x} = e^{-x \log n}$, $\frac{1}{n^{x-1}} = e^{(1-x)\log n}$ et $\frac{1}{(n+1)^{x-1}} = e^{(1-x)\log(n+1)}$ sont continues sur $]1, +\infty[$.

Montrons que g est continue en 1. On a

$$g_n(1) = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{n^x} - \log \frac{n+1}{n}.$$

Pour montrer que $\lim_{x \to 1^+} g_n(x) = g(1)$ il suffit donc de prouver que

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{(n+1)^{x-1}}\right) = \log \frac{n+1}{n}.$$

On a

$$\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{n^{x-1}}-\frac{1}{(n+1)^{x-1}}\right)=\frac{1}{(n+1)^{x-1}}\frac{1}{x-1}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{x-1}-1\right)$$

et comme $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{(n+1)^{x-1}}=1$, il suffit de prouver

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{x-1}-1\right)=\log\frac{n+1}{n}. \qquad (3)$$

Mais

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{x-1}-1=e^{(x-1)\log\frac{n+1}{n}}-1=(x-1)\log\frac{n+1}{n}+(x-1)\varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x\to 1^+}\varepsilon(x)=0$. Ce qui montre bien (3).

On a pour $x>1$,

$$\sum_{n=1}^{N}g_n(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}-\int_1^{N+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^x}=\sum_{n=1}\frac{1}{n^x}-\frac{1}{x-1}\left(1-\frac{1}{N^{x-1}}\right)\to_{N\to+\infty}\zeta(x)-\frac{1}{x-1}.$$

Question 6. L'encadrement

$$0\le g_n(x)\le\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}=x\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}}.$$

découle directement de (1). De sorte que l'on obtient encore directement, en majorant x par 2, et $1/t^{x+1}$ par $1/t^2$, pour tout $x\in[1,2]$,

$$0\le g_n(x)\le 2\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2}{n(n+1)}.$$

Comme la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$ est convergente, on en conclut que la série Σg_n est normalement convergente sur $[1,2]$, et en particulier uniformément convergente.

Question 7. Par le théorème d'interversion des limites pour les séries uniformément convergentes, on a

$$\lim_{x\to 1^+}g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}g_n(1)=\gamma.$$

Mais d'autre part, comme g_n est continue en 1 et comme la convergence de la série Σg_n est uniforme, la somme de cette série est continue en 1, ce qui donne

$$\lim_{x\to 1^+}g(x)=\lim_{x\to 1^+}\zeta(x)-\frac{1}{x-1}=\gamma.$$

Exercice 2

Question 1. On a pour tout $p\ge 0$ et tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} f_n^{(p)}(x)=(-1)^k a^{pn}\sin(a^n x), \text{ si } p=2k \text{ est pair}\\ f_n^{(p)}(x)=(-1)^k a^{pn}\cos(a^n x), \text{ si } p=2k+1 \text{ est impair.}\end{cases}$$

Question 2. Le calcul de la question précédente montre que pour tout $p\ge 1$ et tout $x\in\mathbb{R}$, $|f_n^{(p)}(x)|\le a^{pn}=(a^p)^n$ et donc que $|f_n^{(p)}(x)|$ est majoré par le terme général d'une série géométrique de raison $a^p<1$ (donc qui converge). Par définition la série Σf_n est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Question 3. Comme la série $\Sigma f_n(x)$ converge pour $x = 0$ et que la série $\Sigma f_n'$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, la série Σf_n est uniformément convergente sur tout compact de $\mathbb{R}$ et en continuant ce raisonnement (puisque $\Sigma f_n^{(p)}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ pour tout $p \geq 1$), on prouve que f est $\mathscr{C}^\infty$ et

$$\forall p \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)}(x). \tag{4}$$

Question 4. D'après (4) et la question 1, on a pour tout $p \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$|f^{(p)}(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a^{pn} = \frac{1}{1-a^p}.$$

Une des conséquences de la formule de Taylor-Lagrange est alors que f est la somme, sur $\mathbb{R}$, de sa série de Taylor en l'origine (celle-ci convergeant en tout point $x \in \mathbb{R}$ est de rayon de convergence ∞). On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p,$$

avec $f^{(p)}(0) = 0$ si p est pair et

$$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \sum_{n=0}^{+\infty} a^{(2k+1)n} = \frac{(-1)^k}{1-a^{2k+1}}.$$

Ce qui donne

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(1-a^{2k+1})(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Exercice 3

Question 1. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $a_{n+1}|x|^{n+1}/a_n|x^n| = \frac{|x|}{n+1}$ est de limite nulle quand $n \to +\infty$. D'après la règle de d'Alembert, ceci assure que la série numérique $\Sigma a_n|x|^n$ converge, et donc que la série entière $\Sigma a_n x^n$ est de rayon de convergence infini, puisque x est quelconque. La fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$ et est $\mathscr{C}^\infty$. D'autre part puisque pour tout $n \geq 1$, $(a_n x^n)' = n a_n x^{n-1} = a_{n-1} x^{n-1}$, on obtient $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x)$.

Question 2. Soit $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ un autre série entière de rayon de convergence ∞ qui satisfait, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = g(x)$. On a alors en particulier, pour tout $p \geq 0$, $g^{(p)}(0) = \cdots = g(0) = 1$. Il s'ensuit puisque la série $\Sigma b_n x^n$ est la série de Taylor de g en 0, que $b_n = g^{(n)}(0)/n! = 1/n! = a_n$ et donc que $g = f$.

Exercice 4

Question 1. La fonction f est $\mathscr{C}^1$ par morceaux et à valeurs réelles. Calculons ses coefficients de Fourier trigonométriques. Comme f est paire, on a $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. D'autre part

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(t)\ \mathrm{d}t = 1$$

et pour tout $n \geq 1$

$$\pi a_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos nt\ \mathrm{d}t = \left[\frac{\sin nt}{n}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2 \sin n\pi/2}{n}.$$

En conclusion

$$\begin{cases} a_{2k} = 0 \\ a_{2k+1} = \frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi}. \end{cases}$$

La série de Fourier de f est alors

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos(2k+1)x$$

Question 2. Comme $f \in \mathscr{C}^1_{mor,2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge simplement vers la fonction $\mu(x) = \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+))$. On a $\mu(x) = f(x)$ lorsque x est continue en x. En revanche $\mu(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} \neq f(\frac{\pi}{2}) = 1$. Ainsi la série de Fourier de f ne converge pas simplement vers f ; elle ne saurait converger uniformément vers f. Notons encore que comme les sommes partielles de la série de Fourier sont continues, si la série de Fourier convergeait uniformément, sa limite serait continue, ce que n'est pas sa limite μ.

Question 3. D'après le théorème de Dirichlet,

$$1 = f(0) = \mu(0) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos n0 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1},$$

ce qui donne

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

D'après la formule de Parseval

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) \, \mathrm{d}t = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2(2k+1)^2}.$$

Ce qui donne

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$