DM MATH401 - Année 2017-2018

Problème

Notations. On donne en préambule les notations utilisées dans la suite du problème.

• Pour $E \subset \mathbb{R}$, on note $\chi_E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction indicatrice de E, c'est-à-dire la fonction définie par

$$\begin{cases} \chi_E(x) = 1 \iff x \in E \\ \chi_E(x) = 0 \iff x \notin E. \end{cases}$$

On note $I = [0,1[$ et pour tout intervalle J d'extrémités a et b, $a \leq b$, on note $\ell(J) = b - a$ la longueur de J.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x, c'est-à-dire l'unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leq x < p+1$. On note $\{x\}$ la partie fractionnaire (ou décimale) de x, qui est par définition $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0,1[$.

• Soient $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $J \subset I$. On définit, pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$W(X,N,J) := \{x_n ; n \leq N \text{ et } \{x_n\} \in J\},$$

et on note le cardinal de $W(X,N,J)$ par $\#W(W,N,J)$.

On dit alors que la suite X est **uniformément distribuée modulo** 1 (u.d. mod 1) si pour tout intervalle $J = [a,b[\subset I$, on a

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\#W(X,N,J)}{N} = \ell(J).$$

• On note enfin $\mathscr{E}([0,1];\mathbb{C})$ la $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions en escalier sur $[0,1]$ et $\mathscr{T}_1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ la $\mathbb{C}$-algèbre des polynômes trigonométriques définis sur $\mathbb{R}$ et de période 1, c'est-à-dire les fonctions du type $\sum_{k=-n}^{n} c_n e^{2k\pi i x}$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $c_{-n}, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$. On voit ces deux algèbres comme des sous-algèbres de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathscr{B}([0,1];\mathbb{C})$ des fonctions bornées sur $[0,1]$, munie de la norme de la convergence uniforme, c'est-à-dire de la norme donnée par :

$$\forall f \in \mathscr{B}([0,1];\mathbb{C}), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

En particulier les adhérences $\overline{\mathscr{E}([0,1];\mathbb{C})}$ et $\overline{\mathscr{T}_1(\mathbb{R};\mathbb{C})}$ sont à comprendre au sens de cette norme.

1. On commence par étudier le caractère u.d. mod. 1 de deux suites particulières.

1.a. Montrer que la suite $X = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas u.d. mod 1.

1.b. À l'aide de la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n, pour $n \in \mathbb{N}$, appliquée à la fonction $x \mapsto e^x$ entre 0 et 1, montrer que $\lim_{n\to+\infty}\{n!e\} = 0$. La suite $X = (n!e)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle u.d. mod. 1 ?

2. Montrer que dans la définition d'une suite u.d. mod. 1 la nature de l'intervalle J n'importe pas (autrement dit, il n'est pas nécessaire que J soit de la forme $[a,b[$, et qu'en particulier on aurait pu définir une suite u.d. mod. 1 à l'aide d'intervalles ouverts $]a,b[$).

3. On considère la critère intégral $\mathscr{I}(X)$ suivant portant sur la suite réelle $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\mathscr{I}(X)\ :\qquad \forall f \in \mathscr{C}^0([0,1];\mathbb{C}),\quad \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f.$$

3.a. Soient $J = [a,b[\subset I$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'existent deux fonctions continues $f_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ et $f_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$ telles que

$$\forall x \in [0,1],\ f_1(x) \leq \chi_J(x) \leq f_2(x) \ \text{ et } \int_0^1 (f_2 - f_1) \leq \varepsilon.$$

3.b. Déduire de la question précédente que si le critère $\mathscr{I}(X)$ est satisfait alors il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $N \geq N_\varepsilon$,

$$\int_0^1 f_1 - \varepsilon \leq \frac{\#W(X,N,J)}{N} \leq \int_0^1 f_2 + \varepsilon.$$

En conclure que si le critère $\mathscr{I}(X)$ est satisfait, alors X est u.d. mod 1.

4. Soient $\alpha, \beta \in I$, $\alpha < \beta$ et $K =]\alpha,\beta[$. Montrer que si la suite X est u.d. mod 1, alors[1]

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\chi_K(\{x_n\}) = \int_0^1 \chi_K.$$

En déduire que pour tout $\varphi \in \mathscr{E}(I;\mathbb{C})$,

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}\varphi(\{x_n\}) = \int_0^1 \varphi.$$

5. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $\varepsilon > 0$. Justifier l'appartenance $f \in \overline{\mathscr{E}([0,1];\mathbb{C})}$ et pour $\varepsilon > 0$ donné, en déduire l'existence de $\varphi \in \mathscr{E}([0,1];\mathbb{C})$

$$\forall x \in [0,1],\ |f(x) - \varphi| \leq \varepsilon.$$

Montrer à l'aide de la question 4 que si X est u.d. mod. 1,

$$\left|\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}\varphi(\{x_n\}) - \int_0^1 f\right| \leq \varepsilon.$$

En conclure que X est u.d. mod 1 si et seulement si $\mathscr{I}(X)$ est vrai.

6. Montrer que X est u.d. mod 1 si et seulement si le critère suivant est satisfait

$$\mathscr{I}\mathscr{P}(X)\ :\qquad \forall g \in \mathscr{C}^0_1(\mathbb{R};\mathbb{C}),\quad \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} g(x_n) = \int_0^1 g.$$

1. On prendra bien garde ici à ce que K est un intervalle ouvert, tandis que la définition de l'uniforme distribution mod. 1 d'une suite porte sur les intervalles du type $[a,b[$. On pensera à utiliser la question 2.

7. On considère le critère $\mathscr{W}(X)$ suivant portant sur la suite réelle $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\mathscr{W}(X) \ : \qquad \forall h \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \quad \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} e^{2\pi i h x_n} = 0.$$

7.a. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et 1-périodique. Justifier l'appartenance $f \in \overline{\mathscr{T}_1(\mathbb{R};\mathbb{C})}$.

7.b. On suppose que X satisfait le critère $\mathscr{W}(X)$. Soit $f \in \mathscr{C}_1^0(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Montrer à l'aide de la question précédente que pour tout $\varepsilon > 0$, on a l'existence de $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall N \geq N_\varepsilon, \quad \left| \int_0^1 f - \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} f(x_n) \right| \leq \varepsilon.$$

En déduire que si X satisfait $\mathscr{W}(X)$ alors X est u.d. mod. 1.

7.c. Montrer que X est u.d. mod. 1 si et seulement si X satisfait $\mathscr{W}(X)$.

8. On donne dans cette question un exemple de suite u.d. mod. 1 et un exemple de suite qui ne l'est pas.

8.a. Soit $\theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Montrer que la suite $X = (n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ est u.d. mod. 1.

8.b. En utilisant l'équation (4) de la Proposition 5.0.4 du cours, appliquée à la fonction $x \mapsto e^{2i\pi \log x}$, montrer que la suite $X = (\log n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas u.d. mod 1.