DM MATH401 - Année 2017-2018

Problème

Notations. On donne en préambule les notations utilisées dans la suite du problème.

• Pour $E \subset \mathbb{R}$, on note $\chi_E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction indicatrice de E, c'est-à-dire la fonction définie par

$$\begin{cases} \chi_E(x) = 1 \iff x \in E \\ \chi_E(x) = 0 \iff x \notin E. \end{cases}$$

On note $I = [0, 1[$ et pour tout intervalle J d'extrémités a et b, $a \le b$, on note $\ell(J) = b - a$ la longueur de J.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x, c'est-à-dire l'unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \le x < p + 1$. On note $\{x\}$ la partie fractionnaire (ou décimale) de x, qui est par définition $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$.

• Soient $X = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $J \subset I$. On définit, pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$W(X, N, J) := \{x_n ; n \le N \text{ et } \{x_n\} \in J\},$$

et on note le cardinal de $W(X, N, J)$ par $\#W(W, N, J)$.

On dit alors que la suite X est **uniformément distribuée modulo** 1 (u.d. mod 1) si pour tout intervalle $J = [a, b[\subset I$, on a

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{\#W(X, N, J)}{N} = \ell(J).$$

• On note enfin $\mathscr{E}([0, 1]; \mathbb{C})$ la $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions en escalier sur $[0, 1]$ et $\mathscr{T}_1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ la $\mathbb{C}$-algèbre des polynômes trigonométriques définis sur $\mathbb{R}$ et de période 1, c'est-à-dire les fonctions du type $\sum_{k=-n}^{n} c_n e^{2k\pi i x}$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $c_{-n}, \dots, c_n \in \mathbb{C}$. On voit ces deux algèbres comme des sous-algèbres de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathscr{B}([0, 1]; \mathbb{C})$ des fonctions bornées sur $[0, 1]$, munie de la norme de la convergence uniforme, c'est-à-dire de la norme donnée par :

$$\forall f \in \mathscr{B}([0, 1]; \mathbb{C}), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

En particulier les adhérences $\overline{\mathscr{E}([0, 1]; \mathbb{C})}$ et $\overline{\mathscr{T}_1(\mathbb{R}; \mathbb{C})}$ sont à comprendre au sens de cette norme.

1. On commence par étudier le caractère u.d. mod. 1 de deux suites particulières.

1.a. Montrer que la suite $X = (n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas u.d. mod 1.

1.b. À l'aide de la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n, pour $n \in \mathbb{N}$, appliquée à la fonction $x \mapsto e^x$ entre 0 et 1, montrer que $\lim_{n \to +\infty} \{n!e\} = 0$. La suite $X = (n!e)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle u.d. mod. 1 ?

2. Montrer que dans la définition d'une suite u.d. mod. 1 la nature de l'intervalle J n'importe pas (autrement dit, il n'est pas nécessaire que J soit de la forme $[a, b[$, et qu'en particulier on aurait pu définir une suite u.d. mod. 1 à l'aide d'intervalles ouverts $]a, b[$).

3. On considère la critère intégral $\mathscr{I}(X)$ suivant portant sur la suite réelle $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\mathscr{I}(X)\ :\qquad \forall f\in\mathscr{C}^0([0,1];\mathbb{C}),\ \ \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f.$$

3.a. Soient $J = [a,b[\subset I$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'existent deux fonctions continues $f_1 : [0,1]\to\mathbb{C}$ et $f_2 : [0,1]\to\mathbb{C}$ telles que

$$\forall x\in[0,1],\ f_1(x)\leq\chi_J(x)\leq f_2(x)\ \text{ et }\ \int_0^1 (f_2-f_1)\leq\varepsilon.$$

3.b. Déduire de la question précédente que si le critère $\mathscr{I}(X)$ est satisfait alors il existe $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$, tel que pour tout $N\geq N_\varepsilon$,

$$\int_0^1 f_1-\varepsilon\leq\frac{\#W(X,N,J)}{N}\leq\int_0^1 f_2+\varepsilon.$$

En conclure que si le critère $\mathscr{I}(X)$ est satisfait, alors X est u.d. mod 1.

4. Soient $\alpha,\beta\in I$, $\alpha<\beta$ et $K =]\alpha,\beta[$. Montrer que si la suite X est u.d. mod 1, alors [1]

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\chi_K(\{x_n\}) = \int_0^1\chi_K.$$

En déduire que pour tout $\varphi\in\mathscr{E}(I;\mathbb{C})$,

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}\varphi(\{x_n\}) = \int_0^1\varphi.$$

5. Soit $f : [0,1]\to\mathbb{C}$ une fonction continue et $\varepsilon>0$. Justifier l'appartenance $f\in\mathscr{E}([0,1];\mathbb{C})$ et pour $\varepsilon>0$ donné, en déduire l'existence de $\varphi\in\mathscr{E}([0,1];\mathbb{C})$

$$\forall x\in[0,1],\ |f(x)-\varphi|\leq\varepsilon.$$

Montrer à l'aide de la question 4 que si X est u.d. mod. 1,

$$\left|\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}\varphi(\{x_n\})-\int_0^1 f\right|\leq\varepsilon.$$

En conclure que X est u.d. mod 1 si et seulement si $\mathscr{I}(X)$ est vrai.

6. Montrer que X est u.d. mod 1 si et seulement si le critère suivant est satisfait

$$\mathscr{I}\mathscr{P}(X)\ :\qquad \forall g\in\mathscr{C}^0_1(\mathbb{R};\mathbb{C}),\ \ \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} g(x_n) = \int_0^1 g.$$

1. On prendra bien garde ici à ce que K est un intervalle ouvert, tandis que la définition de l'uniforme distribution mod. 1 d'une suite porte sur les intervalles du type $[a,b[$. On pensera à utiliser la question 2.

7. On considère le critère $\mathscr{W}(X)$ suivant portant sur la suite réelle $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\mathscr{W}(X) \ : \qquad \forall h \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \quad \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} e^{2\pi i h x_n} = 0.$$

7.a. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et 1-périodique. Justifier l'appartenance $f \in \overline{\mathscr{T}_1(\mathbb{R};\mathbb{C})}$.

7.b. On suppose que X satisfait le critère $\mathscr{W}(X)$. Soit $f \in \mathscr{C}_1^0(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Montrer à l'aide de la question précédente que pour tout $\varepsilon > 0$, on a l'existence de $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall N \geq N_\varepsilon, \quad \left| \int_0^1 f - \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} f(x_n) \right| \leq \varepsilon.$$

En déduire que si X satisfait $\mathscr{W}(X)$ alors X est u.d. mod. 1.

7.c. Montrer que X est u.d. mod. 1 si et seulement si X satisfait $\mathscr{W}(X)$.

8. On donne dans cette question un exemple de suite u.d. mod. 1 et un exemple de suite qui ne l'est pas.

8.a. Soit $\theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Montrer que la suite $X = (n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ est u.d. mod. 1.

8.b. En utilisant l'équation (4) de la Proposition 5.0.4 du cours, appliquée à la fonction $x \mapsto e^{2i\pi \log x}$, montrer que la suite $X = (\log n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas u.d. mod 1.

Correction du problème

1.a On a $\{n\} = 0$, donc par exemple $W(X, N, [\frac{1}{2}, 1[) = \emptyset$. On ne peut alors pas avoir $\lim_{n\to+\infty} \frac{\#W(X,N,[\frac{1}{2},1[)}{N} = \frac{1}{2}$, comme ce serait le cas si $X = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ était u.d. mod. 1.

1.b Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le formule de Taylor-Lagrange, il existe $u \in]0, 1[$ tel que

$$e = 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^u}{(n+1)!}.$$

On en déduit, pour $n \geq 2$, en notant p_n l'entier $n!(1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!})$ que

$$0 \leq n!e - p_n \leq \frac{e}{n+1} < 1. \tag{1}$$

En particulier, $\{n!e\} = n!e - p_n \leq \frac{e}{n+1} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

On déduit de plus de (1) que $\#W(X, N, [\frac{1}{2}, 1[) \leq 6$, de sorte que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\#W(X, N, [\frac{1}{2}, 1[)}{N} = 0,$$

ce qui montre que $X = (n!e)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas u.d. mod. 1.

2. Il s'agit de montrer que si pour tout intervalle J d'un certain type on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\#W(X, N, J)}{N} = \ell(J),$$

alors pour tout autre intervalle J' d'un autre type, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\#W(X, N, J')}{N} = \ell(J').$$

Mais les deux types d'intervalle ne diffèrent que quant à leurs extrémités, et par additivité du cardinal, il suffit alors de montrer que si $\{a\} \subset [0, 1[$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\#W(X, N, \{a\})}{N} = 0.$$

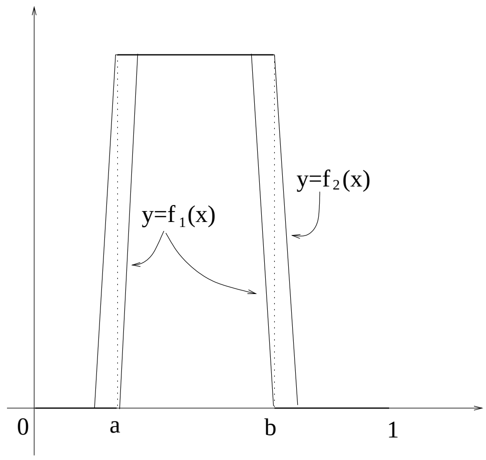
Pour cela on se donne $\varepsilon > 0$ et on considère un intervalle J d'un type donné, de longueur ε et tel que $a \in J$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{W(X, N, \{a\})}{N} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{W(X, N, J)}{N} = \ell(J) = \varepsilon.$$

Cette égalité étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien $\lim_{n\to+\infty} \frac{\#W(X,N,\{a\})}{N} = 0$.

3.a On peut supposer $\varepsilon < (b - a)/2$. On définit f_1 comme étant la fonction affine par morceaux valant 0 sur $[0, 1] \setminus J$, valant 1 sur $[a + \mu, b - \mu]$, dont le graphe au-dessus de $[a, a + \mu]$ est le segment de $\mathbb{R}^2$ d'extrémités $(a, 0)$, $(a + \mu, 1)$ et dont le graphe au-dessus de $[b - \mu, b]$ est le segment de $\mathbb{R}^2$ d'extrémités $(b - \mu, 1)$, $(b, 0)$.

On définit f_2 comme étant la fonction affine par morceaux valant 0 sur $[0, 1] \setminus [a - \mu, b + \mu]$, valant 1 sur J, dont le graphe au-dessus de $[a - \mu, a]$ est le segment de $\mathbb{R}^2$ d'extrémités $(a - \mu 0)$, $(a, 1)$ et dont le graphe au-dessus de $[b, b + \mu, b]$ est le segment de $\mathbb{R}^2$ d'extrémités $(b, 1)$, $(b + \mu, 0)$.



On a alors par construction $f_1 \leq \chi_J \leq f_2$. La quantité $\int_0^1 (f_2 - f_1)$ est la somme des aires des deux parallélogrammes délimités par les graphes de f_1 et f_2. Cette aire est 2μ. Il suffit alors de choisir $\mu \leq \varepsilon/2$ et μ suffisamment petit pour que $[a-\mu, b+\mu] \subset [0,1]$ (ce qui n'est possible que si $a \neq 0$ et $b \neq 1$).

On adapte cette construction au cas particuliers où $a = 0$ ou $b = 1$, en restreignant les fonctions f_1 et f_2 construites ci-dessus à $[0,1]$.

3.b Pour les fonctions f_1, f_2 de la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_1(\{x_n\}) \leq \chi_J(\{x_n\}) \leq f_2(\{x_n\})$ et donc pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, en sommant de 0 à N,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} f_1(\{x_n\}) \leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} \chi_J(\{x_n\}) = \frac{\#W(X,N,J)}{N} \leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} f_2(\{x_n\}).$$

Si l'on suppose que le critère $\mathscr{I}(X)$ est vérifié, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \geq N_\varepsilon$,

$$\int_0^1 f_1 + \varepsilon \leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} f_1(\{x_n\}) \leq \frac{\#W(X,N,J)}{N} \leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} f_2(\{x_n\}) \leq \int_0^1 f_2 + \varepsilon. \qquad (2)$$

Mais du fait que $0 \leq \int_0^1 f_2 - \int_0^1 f_1 \leq \varepsilon$, et $\int_0^1 \chi_J \in [\int_0^1 f_1, \int_0^1 f_2]$, on a

$$\int_0^1 f_2 \leq \int_0^1 \chi_J + \varepsilon = \ell(J) + \varepsilon$$

et

$$\ell(J) - \varepsilon = \int_0^1 \chi_J - \varepsilon \leq \int_0^1 f_2,$$

ce qui avec (2) donne pour tout $N \geq \varepsilon$,

$$\int_0^1 \chi_J - 2\varepsilon \leq \frac{\#W(X,N,J)}{N} \leq \int_0^1 f_2 + \varepsilon \leq \int_0^1 \chi_J + 2\varepsilon.$$

On en conclut que l'on a bien

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\#W(X,N,J)}{N} = \ell(J).$$

4. D'après la question 2, le type d'intervalle considéré dans la définition de l'uniforme distribution mod. 1 des suites est indifférent. Cette définition a donc lieu pour les intervalles ouverts lorsqu'elle a lieu pour les intervalles du type $[a,b[$. D'autre part $\sum_{n=0}^{N}\chi_K(\{x_n\})$ est $\#W(X,N,K)$. On a donc si X est u.d. mod. 1

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}\chi_K(\{x_n\})=\lim_{n\to+\infty}\frac{\#W(X,N,K)}{N}=\ell(K)=\int_0^1\chi_K.$$

En écrivant $\varphi=\sum_{j=0}^{p-1}c_j\chi_{]a_j,a_j+1[}$, pour $0=a_0<a_1<\cdots<a_p=1$ une subdivision adaptée à φ, on trouve

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}\varphi(\{x_n\})=\sum_{j=0}^{p-1}c_j\int_0^1\chi_{]a_j,a_j+1[}=\int_0^1\varphi.$$

5. Les fonctions en escalier sont denses dans les fonctions continues pour la norme de la convergence uniforme. Soient alors $\varepsilon>0$ et $\varphi\in\mathscr{E}([0,1];\mathbb{C})$ tels que $\|f-\varphi\|_\infty\le\varepsilon$. D'après la question précédente, si X est u.d. mod. 1

$$\begin{aligned}\left|\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}\varphi(\{x_n\})-\int_0^1 f\right|&=\left|\int_0^1\varphi-\int_0^1 f\right|\le\left|\int_0^1(\varphi-f)\right|\\&\le\int_0^1|\varphi-f|\le\int_0^1\varepsilon=\varepsilon.\end{aligned}$$

Il existe donc $N_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $N\ge N_0$

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}\varphi(\{x_n\})-\int_0^1 f\right|\le 2\varepsilon. \tag{3}$$

D'autre part, toujours d'après $\|f-\varphi\|_\infty\le\varepsilon$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}\varphi(\{x_n\})-\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}f(\{x_n\})\right|&=\frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N}\varphi(\{x_n\})-f(\{x_n\})\right|\\&\le\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}|\varphi(\{x_n\})-f(\{x_n\})|\le\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}\varepsilon=\frac{N+1}{N}\varepsilon\le 2\varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui avec (3) donne : pour tout $\varepsilon>0$ il existe $N_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $N\ge N_0$

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}f(\{x_n\})-\int_0^1 f\right|\le 4\varepsilon,$$

ce qui est exactement le critère $\mathscr{I}(X)$.

En conclusion les questions 3.b et 5 montrent que X est u.d. mod. 1 si et seulement si le critère $\mathscr{I}(X)$ est satisfait.

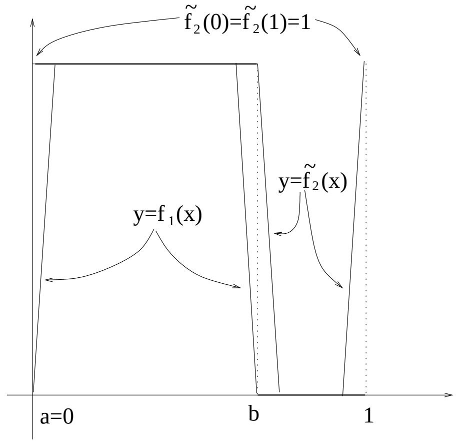
6. Commençons par montrer que pour toute suite X, on $\mathscr{I}(X)\Longrightarrow\mathscr{I}\mathscr{P}(X)$.
Soit $g\in\mathscr{C}_1^0(\mathbb{R};\mathbb{C})$ et $f=g_{\restriction[0,1]}$. D'après $\mathscr{I}(X)$, on a

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}f(\{x_n\})=\int_0^1 f.$$

Mais $f(\{x_n\}) = g(x_n)$ par 1-périodicité de g et bien sûr $\int_0^1 g = \int_0^1 f$, donc

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} g(\{x_n\}) = \int_0^1 g.$$

Réciproquement, montrons que pour toute suite X, on $\mathscr{IP}(X) \Longrightarrow \mathscr{I}(X)$. Si $f \in \mathscr{C}^0([0,1];\mathbb{R})$, on reprend la preuve de la question 3.b, mais en considérant des fonctions affines par morceaux $\widetilde{f_1} \in \mathscr{E}([0,1];\mathbb{C})$ et $\widetilde{f_2} \in \mathscr{E}([0,1];\mathbb{C})$, telles que $\widetilde{f_1}(1) = \widetilde{f_1}(0)$ et $\widetilde{f_2}(1) = \widetilde{f_2}(0)$. On peut prendre $\widetilde{f_1} = f_1$ et $\widetilde{f_2} = f_2$ dès que $J =]a,b[$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 1$. Dans le cas où par exemple $a = 0$, on définit $\widetilde{f_1} = f_1$ et $\widetilde{f_2}$ comme sur la figure qui suit.



La même preuve que celle de la question 3.b montre alors que le critère $\mathscr{IP}(X)$, appliqué au prolongement 1-périodique de $\widetilde{f_1}$ et de $\widetilde{f_2}$ à $\mathbb{R}$ tout entier, implique le critère $\mathscr{I}(X)$ pour f.

7.a. Il s'agit du théorème de Stone-Weierstraß trigonométrique.

7.b. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question 7.a, il existe un polynôme trigonométrique $P \in \mathscr{T}_1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ tel que $\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$. Il s'ensuit que

$$\left|\int_0^1 f - \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} f(x_n)\right|$$

$$\leq \left|\int_0^1 f - \int_0^1 P\right| + \left|\int_0^1 P - \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} P(x_n)\right| + \left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} f(x_n) - P(x_n)\right|.$$

Or $\left|\int_0^1 f - \int_0^1 P\right| \leq \int_0^1 |f - P| \leq \varepsilon$, $\int_0^1 P = 0$, car P a pour primitive une fonction 1-périodique, et $\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} f(x_n) - P(x_n)\right| \leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} |f(x_n) - P(x_n)| \leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} \varepsilon = \frac{N+1}{N}\varepsilon \leq 2\varepsilon$. On obtient alors

$$\left|\int_0^1 f - \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} f(x_n)\right| \leq 3\varepsilon + \left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} P(x_n)\right|.$$

Mais d'après le critère $\mathscr{W}(X)$, il existe N_ε, tel que pour tout $N \geq N_\varepsilon$, $\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} P(x_n)\right| \leq \varepsilon$.

Ce qui montre que pour tout $N \geq N_\varepsilon$, $\left|\int_0^1 f - \frac{1}{N}\sum_{n=0}^N f(x_n)\right| \leq 4\varepsilon$, et donc que le critère $\mathscr{I}(X)$ est satisfait, ou encore que X est u.d. mod. 1.

7.c. Réciproquement, si X est u.d. mod. 1, le critère $\mathscr{I}(X)$ est satisfait en particulier pour $f(x) = \sum_{n=0}^N e^{2\pi i h x}$, quel que soit $h \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, car $f \in \mathscr{C}_1^0(\mathbb{R};\mathbb{C})$. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^N f(x_n) = \int_0^1 f.$$

Mais comme $\int_0^1 f = 0$, on en conclut que le critère $\mathscr{W}(X)$ est satisfait.

8.a. On montre que le critère $\mathscr{W}(X)$ est satisfait. Soit $h \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. On a

$$\sum_{n=0}^N e^{2\pi i h n\theta} = \frac{1-e^{2\pi i h\theta(N+1)}}{1-e^{2\pi i h\theta}} = e^{\pi i h\theta N}\frac{\sin \pi h\theta N}{\sin \pi h\theta},$$

et donc

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^N e^{2\pi i h n\theta}\right| = \frac{1}{N}\left|\frac{\sin \pi h\theta N}{\sin \pi h\theta}\right| \leq \frac{1}{N}\frac{1}{|\sin \pi h\theta|} \to_{n\to+\infty} 0.$$

8.b. Soit $f(x) = e^{2\pi i \log x}$. Cette fonction admet pour primitive $F(x) = \frac{xe^{2\pi i\log x}}{2i\pi+1}$. D'après la formule (4) de la Proposition 5.0.4, , on a

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N f(n) = \frac{1}{N}\int_1^N f(t)\ \mathrm{d}t + \frac{1}{N}\int_1^N \{t\}f'(t)\ \mathrm{d}t = \frac{Ne^{2\pi i\log N}-1}{N(2\pi i+1)} + \frac{1}{N}\int_1^N \{t\}f'(t)\ \mathrm{d}t.$$

D'autre part

$$\frac{1}{N}\left|\int_1^N \{t\}f'(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{N}\int_1^N \left|\{t\}f'(t)\right|\ \mathrm{d}t \leq \frac{1}{N}\int_1^N \left|f'(t)\right|\ \mathrm{d}t \leq \frac{2\pi}{N}\int_1^N \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t \to_{n\to+\infty} 0.$$

En conclusion, $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N f(n)$ converge quand $N\to+\infty$ si et seulement si $\frac{Ne^{2\pi i\log N}-1}{N(2\pi i+1)}$ converge quand $N\to+\infty$, ce qui équivaut à la convergence de $e^{2\pi i\log N}$ quand $N\to+\infty$. Or cette suite ne converge pas ; le critère $\mathscr{W}((\log n)_{n\in\mathbb{N}^*})$ n'est pas vérifié et donc $(\log n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas u.d. mod. 1.