MATH401 - Contrôle terminal du 29 mars 2018

Aucun document, aucun appareil électronique autorisé. Les points en marge sont donnés à titre de comparaison d'une question à l'autre. Les notes seront ramenées à 20.
La note tiendra grandement compte de la clarté et de la rigueur de l'expression.

(1pt) **Questions de cours 1.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Donner la définition de la convergence de la série Σu_n

(2pts) **Questions de cours 2.** Énoncer la règle de comparaison série-intégrale.

(2pts) **Questions de cours 3.** Énoncer le théorème de Stone-Weierstraß trigonométrique.

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $u_n = e^{an^2}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n^3}$.

(1pt) **1.** À l'aide de la formule de Taylor-Young donner le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \log(1+x)$ pour x voisin de 0.

(1pt) **2.** En déduire $\lim_{n\to+\infty} \log\left(e^{an}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n^2}\right)$.

(2pts) **3.** Énoncer la règle de Cauchy pour les séries. Déduire de la question précédente la nature de la série Σu_n.

Exercice 2. Soient $\alpha > 0$ et $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $\forall n \geq 1,\ a_n = \frac{\log^\alpha n}{n}$.

(1pt) **1.** Montrer que la série Σa_n est divergente.

(1pt) **2.** Montrer que la fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{\log^\alpha x}{x}$ est décroissante sur un intervalle du type $]a, +\infty[$, pour un certain $a > 0$.

(2pts) **3** À l'aide de la question précédente, trouver un équivalent quand $n \to +\infty$ de la somme partielle S_n d'ordre n de Σa_n.

Exercice 3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+x^2 n\sqrt{n}}.$$

(1pt) **1.** Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(3pts) **2.** La convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

(3pts) **3.** Soit $a > 0$. Que peut-on dire de la suite de fonctions $(f_{n\restriction[a,+\infty[})_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 4. On définit, pour toute fonction $f : [0,1] :\to \mathbb{R}$ continue par morceaux, la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\hat{f}(x) = \int_0^1 \sin(xt) f(t) \; \mathrm{d}t.$$

(2pts) **1.** Montrer que si $a, b \in [0,1]$ et si $f = \chi_{]a,b[}$ est la fonction qui vaut 1 sur $]a, b[$ et 0 sur $[0,1] \backslash]a, b[$, alors

$$\lim_{x \to \pm\infty} \hat{f}(x) = 0. \qquad (*)$$

(1pt) **2.** Montrer que la propriété $(*)$ a lieu lorsque f est une fonction en escalier sur $[0,1]$.

(4pts) **3.** Déduire de la question précédente, à l'aide d'un théorème de densité, que la propriété $(*)$ a lieu lorsque f est une fonction continue par morceaux sur $[0,1]$.

Exercice 5. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $f_n :] - 1, , 1[\to \mathbb{R}$, la fonction définie par

$$f_n(x) = \frac{x \cos nx}{n^3 \log n}.$$

(2pts) **1.** Montrer que la série de fonctions Σf_n est uniformément convergente sur $] - 1, 1[$. On note $f :] - 1, 1[\to \mathbb{R}$ la somme de cette série.

(3pts) **2.** Montrer que f est dérivable sur $] - 1, 1[$ et donner une expression de $f'(0)$.

(3pts) **3.** Donner une expression de $\int_0^1 f(t) \; \mathrm{d}t$.

Corrigé du contrôle de MATH401 - 29 mars 2018

Exercice 1

Question 1. Comme $x \mapsto \log(x+1)$ est deux fois dérivable en 0, on a l'existence d'une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de limite nulle en 0 telle que pour tout $x \in]-1,1[$, $\log(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$.

Question 2. On a d'après la question précédente,

$$\log\left(e^{an}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n^2}\right) = an + n^2\log\left(1-\frac{a}{n}\right) = an + n^2\left(-\frac{a}{n} - \frac{a^2}{2n^2} + \frac{a^2}{n^2}\nu(n)\right) = -\frac{a^2}{2} + a^2\nu(n),$$

avec $\lim_{n\to+\infty} \nu(n) = 0$. Il s'ensuit par continuité de la fonction exponentielle en $-\frac{a^2}{2}$ que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{an}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n^2} = e^{-\frac{a^2}{2}}$$

Question 3. Le terme u_n est positif pour $n > a$ et par ailleurs, $\sqrt[n]{u_n} = e^{an}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n^2} \to e^{-\frac{a^2}{2}} < 1$ quand $n \to +\infty$. En conséquence, d'après la règle de Cauchy, la série Σu_n converge.

Exercice 2

Question 1. Comme $a_n \geq \frac{1}{n}$, pour $n \geq 1$, le critère de comparaison des séries de terme général positif assure que Σa_n diverge.

Question 2. On a

$$f'(x) = \frac{\log^{\alpha-1} x}{x^2}(\alpha - \log x) < 0$$

pour $x > a = e^\alpha$. Donc f est décroissante sur $]a, +\infty[$.

Question 3. Le théorème de comparaison série-intégrale assure que

$$S_n \sim_{n\to+\infty} \int_1^n f = \frac{1}{\alpha+1}[\log^{\alpha+1} x]_1^n \sim_{n\to+\infty} \frac{\log^{\alpha+1} n}{\alpha+1}.$$

Exercice 3

Question 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\frac{nx}{1+x^2n\sqrt{n}} = \frac{x}{\frac{1}{n}+x^2\sqrt{n}} \to 0$$

quand $n \to +\infty$. Donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle f.

Question 2. On a $f'(x) = \frac{n}{(1+x^2n\sqrt{n})^2}(1 - x^2n\sqrt{n})$. Donc $|f_n|$ atteint son maximum en $x_n = \pm\frac{1}{\sqrt{n\sqrt{n}}}$ et celui-ci vaut $\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{n}} \to_{n\to+\infty} +\infty$. Par conséquent $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n - f| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n| = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{n}}$ ne tend pas vers 0 et la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f nest pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

Question 3. Notons $g_n := f_{n\restriction[a,+\infty[}$. La fonction f_n étant décroissante sur $[x_n, +\infty[$. Comme $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$, la fonction g_n est décroissante sur $[a, +\infty[$ pour n suffisamment grand et donc majorée par $g_n(a) = f_n(a)$. Du fait que $\lim_{n\to+\infty} f_n(a) = 0$, on en déduit que la suite (g_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$ vers la fonction nulle.

Exercice 4

Question 1. Soit $f = \chi_{]a,b[}$. Alors

$$\hat{f}(x) = \int_a^b \sin(xt)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x}[-\cos(xt)]_a^b \to 0,$$

quand $x \to \pm\infty$.

Question 2. Par linéarité de l'intégrale, la propriété $(*)$ a lieu pour toute fonction en escalier.

Question 3. On sait que l'espace des fonctions en escalier est dense dans l'espace des fonctions continues par morceaux pour la norme uniforme. Soit alors f une fonction continue par morceaux, $\varepsilon > 0$ et $\psi \in \mathscr{E}([0,1];\mathbb{R})$ telle que $\|f-\psi\|_\infty \leq \varepsilon$. On a

$$|\hat{f}(x)| = |\hat{f}(x) - \hat{\psi}(x) + \hat{\psi}(x)| \leq |\hat{f}(x) - \hat{\psi}(x)| + |\hat{\psi}(x)| = |\int_0^1 \sin(xt)(f(t)-\psi(t))\ \mathrm{d}t| + |\hat{\phi}(x)|$$

$$\leq \int_0^1 |\sin(xt)(f(t)-\psi(t))|\ \mathrm{d}t + |\hat{\psi}(x)| \leq \int_0^1 |f(t)-\psi(t)|\ \mathrm{d}t + |\hat{\psi}(x)|$$

$$\leq \int_0^1 \|f-\psi\|_\infty\ \mathrm{d}t + |\hat{\psi}(x)| \leq \varepsilon + |\hat{\psi}(x)|.$$

Mais d'après la question précédente il existe $X_{\varepsilon,\psi} \in \mathbb{R}_+$, tel que pour $|x| \geq X_{\varepsilon,\psi}$, $|\hat{\psi}(x)| \leq \varepsilon$, de sorte que pour $|x| \geq X_{\varepsilon,\psi}$, on a

$$|\hat{f}(x)| \leq 2\varepsilon,$$

ce qui montre que $\lim_{x\to\pm\infty} \hat{f}(x) = 0$.

Exercice 5.

Question 1. On a pour tout $n \geq$ et tout $x \in]-1,1[$,

$$|f_n(x)| = \frac{|x\cos nx|}{n^3 \log n} \leq \frac{1}{n^3\log n}.$$

Or la série numérique $\Sigma \frac{1}{n^3 \log n}$ est convergente. Il s'ensuit que la série de fonctions Σf_n est normalement convergente sur $]-1,1[$ et donc uniformément convergente sur $]-1,1[$.

Question 2. On a pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in]-1,1[$, $f_n'(x) = \frac{\cos nx - nx\sin nx}{n^3\log n}$, et donc

$$|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n^3\log n} + \frac{1}{n^2\log n}.$$

Les séries numériques $\Sigma\frac{1}{n^3\log n}$ et $\Sigma\frac{1}{n^2\log n}$ étant convergentes, la série de fonctions $\Sigma f_n'$ est normalement convergente sur $]-1,1[$ et donc uniformément convergente sur $]-1,1[$. D'après un théorème du cours, la fonction f est dérivable et pour tout $x \in]-1,1[$

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n'(x).$$

En particulier, $f'(0) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3\log n}$.

Question 3. Le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions uniformément convergentes assure que

$$\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=2}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

Calculons $\int_0^1 f_n(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n^3 \log n} \int_0^1 x \cos nx\ \mathrm{d}t$. Une intégration par parties donne

$$\int_0^1 x \cos nx\ \mathrm{d}t = \left[x \frac{\sin nx}{n} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin nx}{n}\ \mathrm{d}t = \frac{\sin n}{n} - \left[-\frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^1 = \frac{\sin n}{n} + \frac{\cos n}{n^2} - \frac{1}{n^2}.$$

Ainsi

$$\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^4 \log n} + \frac{\cos n}{n^5 \log n} - \frac{1}{n^5 \log n}.$$