MATH401 - Contrôle terminal du 16 mai 2018

Aucun document, aucun appareil électronique autorisé. Les points en marge sont donnés à titre de comparaison entre les questions. Les notes seront ramenées à 20.

La note tiendra grandement compte de la clarté et de la rigueur de l'expression.

Exercice 1. On rappelle que par définition, pour tout $y > 0$

$$y^x := e^{x \log y}.$$

On considère la série de fonctions Σf_n, dont le terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{n^x} = n^{-x}.$$

(2pts) **1.** Montrer que pour tout $x > 0$, pour tout entier $n \geq 1$

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}, \tag{1}$$

puis que pour tout $n \geq 2$

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}. \tag{2}$$

(2pts) **2.** Montrer que la série numérique $\Sigma f_n(x)$ converge si et seulement si $x > 1$.

On note alors $\zeta :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\zeta(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

(2pts) **3.** Pour tout entier $p, n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $f_n^{(p)}(x)$.

Soit $a > 1$ et $p \geq 0$ un entier. Montrer que la série de fonctions $\Sigma_{n\geq 1} f_n^{(p)}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

(2pts) **4.** Montrer que la fonction $\zeta :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ est $\mathscr{C}^\infty$ et donner pour tout $p \geq 0$, pour tout $x > 1$, une expression de $\zeta^{(p)}(x)$.

Exercice 2. Soit $a \in [0, 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction

$$f_n(x) = \sin(a^n x).$$

(1pt) **1.** Calculer, pour tout entier $p \geq 1$, pour tout entier $n \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n^{(p)}(x)$.

(2pts) **2.** Montrer que pour tout $p \geq 1$ la série de fonctions $\Sigma_{n\in\mathbb{N}} f_n^{(p)}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

(3pts) **3.** Déduire de la question précédente que la série de fonctions $\Sigma_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est uniformément convergente sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$ et que sa somme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ dont on donnera les fonctions dérivées $x \mapsto f^{(p)}(x)$, $p \geq 0$, comme somme de séries de fonctions.

Tournez la page S.V.P.

(3pts) **4.** Déduire de la question précédente que f coïncide sur $\mathbb{R}$ avec la somme d'une série entière de rayon de convergence ∞, que l'on précisera.

Exercice 3. Soit $\Sigma a_n x^n$ la série entière définie par $a_n = \frac{1}{n!}$.

(3pts) **1.** Montrer que cette série entière définit une fonction $\mathscr{C}^\infty$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' - y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

.

(3pts) **2.** Sans vous référer à des théorèmes d'unicité des solutions des équations différentielles, montrer que f est l'unique solution développable en série entière sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \in [-\pi, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi] \\ f(x) = 1 & \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

(3pts) **1.** Calculer les coefficients de Fourier de f et donner la série de Fourier de f.

(2pts) **2.** La série de Fourier de f converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$? La série de Fourier de f converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$?

(3pts) **3.** Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$