MATH421 - Examen du 29 mars 2016

La correction tiendra grandemen compte de la clarté et de la rigueur de l'expression.

(3 pts) **Questions de cours 1.** Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer que si une fonction $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ est localement Riemann-intégrable sur $[a,b[$ et bornée sur $[a,b[$, alors on peut la prolonger en b en une fonction $\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-intégrable.

(2 pts) **Question de cours 2.** Énoncer et prouver le théorème de changement de variables.

(2 pts) **Question de cours 3.** Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction localement Riemann-intégrable sur $[a,b[$. Montrer que si l'intégrale généralisée $\int_a^b f$ est absolument convergente, alors elle est aussi convergente.

(5 pts) **Exercice 1.** Donner la famille des primitives $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = \frac{1}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

(3 pts) **Exercice 2.** Donner la famille des primitives $G :]0, \frac{\pi}{4}[\to \mathbb{R}$ de la fonction $g :]0, \frac{\pi}{4}[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{4}[,\ \ g(x) = \frac{1}{\cos(x)}.$$

(5 pts) **Exercice 3.** Donner la famille des primitives $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}.$$