Corrigé du devoir no 1 de MATH421 - année 2016-2017

Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(x) = 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x \notin \mathbb{Q}, \\ g(x) = \dfrac{1}{q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q}, \text{ avec } p,q \in \mathbb{N} \text{ et } p \wedge q = 1. \end{cases}$$

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x = 0, \\ f(x) = 1 & \text{si } x \in]0,1]. \end{cases}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $R_n := \{\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0,1]; p,q \in \mathbb{N}, p \wedge q = 1 \text{ et } q \leq n\}$. On note $r_n := \text{card}(R_n)$. Donner un majorant de r_n en fonction de n.

Réponse. *On a $R_n \subset \{\dfrac{p}{q}; (p,q) \in [\![1,n]\!]^2\}$. Ainsi $r_n \leq card([\![1,n]\!]^2) = n^2$.*

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et σ_n une subdivision de $[0,1]$ contenant R_n. Montrer que si I est un intervalle ouvert dont les extrémités sont deux points consécutifs de σ_n, pour tout $x \in I$, $0 \leq g(x) \leq \dfrac{1}{n}$.

Réponse. *Si $x \in I$, soit $x \notin \mathbb{Q}$ et dans ce cas $g(x) = 0$, soit $x = p/q$, avec $p \wedge q = 1$ et $q \geq n$ (puisque $x \notin R_n$). Dans ce second cas on a $g(x) = 1/q \leq n$.*

3. Construire une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[0,1]$ telle que

$$\forall x \in [0,1],\ |g(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{1}{n}$$

Réponse. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et φ_n la fonction en escalier qui vaut 0 sur tous les intervalles I dont les extrémités sont deux points consécutifs de R_n, et qui vaut $\varphi_n(x) = g(x)$ si $x \in R_n$. D'après la question précédente, on a $0 \leq g(x) - \varphi_n(x) = g(x) \leq \dfrac{1}{n}$ si $x \in I$ et d'autre part $g(x) - \varphi_n(x) = 0$ si $x \in R_n$.*

4. Montrer que g est Riemann-intégrable et calculer son intégrale.

Réponse. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit θ_n la fonction en escalier sur $[0,1]$ qui vaut constamment $1/n$. D'après la question précédente, la suite $(\varphi_n, \theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite associée à g, puisque $\displaystyle\int_0^1 \theta_n = 1/n \to 0$ quand $n \to \infty$. Il s'ensuit que g est Riemann-intégrable sur $[0,1]$ et que $\displaystyle\int_0^1 g = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n = 0$.*

5. Montrer que f est Riemann-intégrable.

Réponse. *La fonction f étant en escalier est Riemann-intégrable.*

6. Est-il vrai que la composée de deux fonctions Riemann-intégrables est Riemann-intégrable ?

Réponse. *La fonction* $f \circ g$ *est la composée de deux fonctions Riemann-intégrables.*
Si $x \notin \mathbb{Q}$ *ou* $x = 0$, $f(g(x)) = f(0) = 0$.
Si $x \in \mathbb{Q} \cap]0,1]$, $f(g(x)) = 1$, *puisque* $g(x) \neq 0$.

En conséquence la fonction $f \circ g$ *coïncide avec la fonction indicatrice* χ *de* $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ *sur* $]0,1]$ *et vaut* 0 *en* 0. *On sait alors que* $f \circ g$ *n'est pas Riemann-intégrable, car elle diffère de* χ *en seul point (en* 0*) et* χ *n'est pas Riemann-intégrable.*

En conclusion la composée de deux fonctions Riemann-intégrables n'est pas en général Riemann-intégrable.