MATH421 - Corrigé de l'examen du 10 mai 2017

Exercice 1.

1.a. La fonction f est localement intégrable sur $]0,1]$ car elle y est continue. De plus elle est bornée. D'après un théorème du cours $\int_0^1 f$ est convergente.

1.b. La fonction f est localement intégrable sur $]0,+\infty[$ car elle y est continue. Cette fonction est de plus de signe constant (positif) sur $]1,+\infty[$. On a $\sin(\frac{1}{x}) \sim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$, puisque $\sin t \sim_{t\to 0} t$. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}$ diverge, $\int_1^{+\infty} f$ diverge. Les questions 1.a et 1.b montrent par définition que $\int_0^{+\infty} f$ diverge.

1.c. Un équivalent en $+\infty$ de la fonction $y \mapsto \int_0^y f$ est donné par $\int_1^y \frac{1}{x} = \log y$.

Exercice 2.

2.a. La fonction f est localement intégrable sur $]0,1]$ car elle y est continue. On a de plus

$$e^{\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} + \sqrt{x}\,\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \cos x = 1 + x\nu(x),$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0} \nu(x) = 0$. On en déduit que $e^{\sqrt{x}} - \cos x = \sqrt{x}\,u(x)$, avec $\lim_{x\to 0} u(x) = 1$, et donc que

$$f(x) \sim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

L'intégrale $\int_0^1 f$ est donc convergente comme l'est $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}$.

2.b. D'après la question précédente, $\int_0^y f \sim_{y\to 0} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{x}} = 2[\sqrt{x}]_0^y = 2[\sqrt{y} - \sqrt{0}] = 2\sqrt{y}$.

Exercice 3. La fonction f est localement intégrable sur $[1,+\infty[$, car elle y est continue.

3.a. Soit $a > 1$. Une intégration par parties entre 1 et a donne

$$\int_1^a f = \Big[-\frac{\cos x}{x^\alpha}\Big]_1^a - \alpha \int_1^a \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}.$$

Comme $\alpha + 1 > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}$ converge (absolument) et comme $\lim_{a\to+\infty} \Big[-\frac{\cos x}{x^\alpha}\Big]_1^a = \cos 1$, on en déduit que $\int_1^{+\infty} f$ est convergente.

3.b. D'après la question précédente, pour tout y, a tels que $1 < y < a$,

$$\int_y^a f = \Big[-\frac{\cos x}{x^\alpha}\Big]_y^a - \alpha \int_y^a \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}.$$

À l'aide d'une autre intégration par parties, on en déduit que

$$\int_y^a f = \Big[-\frac{\cos x}{x^\alpha}\Big]_y^a - \alpha\Big[\frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\Big]_y^a - \alpha(\alpha+1)\int_y^a \frac{\sin x}{x^{\alpha+2}}. \tag{1}$$

Or

$$|\int_y^a \frac{\sin x}{x^{\alpha+2}}| \leq \int_y^a \frac{|\sin x|}{x^{\alpha+2}} \leq \int_y^a \frac{1}{x^{\alpha+2}} = -\Big[\frac{1}{(\alpha+1)x^{\alpha+1}}\Big]_y^a$$

En faisant tendre a vers $+\infty$ dans (1), on obtient

$$\int_y^{+\infty} f = \frac{\cos y}{y^\alpha} + \alpha\frac{\sin y}{y^{\alpha+1}} + g(y),$$

avec $|g(y)| \leq \dfrac{\alpha}{y^{\alpha+1}}$. On en conclut que $\displaystyle\int_y^{+\infty} f \sim_{y\to+\infty} \frac{\cos y}{y^\alpha}$.

3.c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [n\pi,(n+1)\pi]$,

$$\frac{|\sin x|}{(n+1)^\alpha\pi^\alpha} \leq |f(x)| \leq \frac{|\sin x|}{n^\alpha\pi^\alpha}. \tag{$*$}$$

Soit $y > 1$ et n_y l'entier défini par $n_y\pi \leq y < (n_y+1)\pi$. Alors, par la relation de Chasles et $(*)$,

$$\sum_{n=1}^{n_y-1}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{(n+1)^\alpha\pi^\alpha} = \frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{n=1}^{n_y-1}\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_1^y |f|.$$

Mais comme $\alpha < 1$, la série de terme général $1/(n+1)^\alpha$ diverge et donc $\displaystyle\lim_{y\to\infty}\int_1^y |f| = +\infty$.

3.d. Le théorème de comparaison série-intégrale assure qu'un équivalent de $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha}$ quand $N \to +\infty$ est $\displaystyle\int_1^N \frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)N^{\alpha-1}}$.

3.e. On reprend le calcul de la question 3.c, qui donne à partir de $(*)$ l'encadrement

$$\frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{n=1}^{n_y-1}\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_1^y |f| \leq \int_1^{(n_y+1)\pi}|f| \leq \int_1^\pi |f| + \sum_{n=1}^{n_y}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{n^\alpha\pi^\alpha} = \int_1^\pi |f| + \frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{n=1}^{n_y}\frac{1}{n^\alpha}.$$

Autrement dit, par la question 3.d,

$$\frac{2}{\pi^\alpha}\frac{1}{(1-\alpha)n_y^{\alpha-1}} \sim_{y\to\infty} \frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{n=1}^{n_y-1}\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_1^y |f|$$

$$\leq \int_1^\pi |f| + \frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{n=1}^{n_y}\frac{1}{n^\alpha} \sim_{y\to\infty} \frac{2}{\pi^\alpha}\frac{1}{(1-\alpha)n_y^{\alpha-1}}.$$

Ce qui prouve que

$$\int_1^y |f| \sim_{y\to\infty} \frac{2}{\pi^\alpha}\frac{1}{(1-\alpha)n_y^{\alpha-1}}.$$

Mais comme d'autre part $n_y \sim_{y\to\infty} y/\pi$, on en conclut que

$$\int_1^y |f| \sim_{y\to\infty} \frac{2}{\pi}\frac{1}{(1-\alpha)y^{\alpha-1}} = \frac{2y^{1-\alpha}}{\pi(1-\alpha)}.$$