**Licence de Sciences et Technologies - 2ème année**

**Université de Savoie Mont Blanc**

**MATH421 - Calcul intégral**

Ch. LÉCOT (2014–2015)

Et au contraire toutes les fois que je me tourne vers les choses que je pense concevoir fort clairement, je suis tellement persuadé par elles, que de moi-même je me laisse emporter à ces paroles : Me trompe qui pourra, si est-ce qu'il ne saurait jamais faire que je ne sois rien, tandis que je penserai être quelque chose ; ou que quelque jour il soit vrai que je n'aie jamais été, étant vrai maintenant que je suis ; ou bien que deux et trois joints ensemble fassent plus ni moins que cinq, ou choses semblables, que je vois clairement ne pouvoir être d'autre façon que je les conçois.

R. Descartes, *Méditation troisième*

CHAPITRE 1

# Intégration des fonctions

Le but de l'intégration est de pouvoir mesurer des aires. On réduit le problème à la mesure de l'aire située entre l'axe des abscisses et la courbe représentative d'une fonction positive. On commence par des fonctions constantes par morceaux.

## 1. Construction de l'intégrale

Si $E$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, on note $1_E$ la *fonction indicatrice* de $E$, définie par

$$1_E(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Définition 1.1.** Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $f$ une fonction définie sur $E$, à valeurs réelles ou complexes. On dit que $f$ est *uniformément continue* sur $E$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad |x-y| < \eta \text{ et } x, y \in E \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

**Exemple 1.1.** La fonction

$$x \in [0,1] \to x^2 \in \mathbb{R}$$

est uniformément continue : si $x, y \in [0,1]$, on a

$$|x^2 - y^2| = |(x-y)(x+y)| \leq 2|x-y|,$$

donc, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$|x-y| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } x, y \in [0,1] \ \Rightarrow\ |x^2 - y^2| < \varepsilon.$$

**Théorème 1.1** (Heine)**.** *Toute fonction à valeurs réelles ou complexes, continue sur un intervalle fermé borné* $[a,b]$*, est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. On suppose que $f$ n'est pas uniformément continue. Il existe alors $\delta > 0$, tel que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n, y_n \in [a,b]$ tels que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \delta.$$

D'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, on peut extraire de la suite $(x_n)_{n>0}$ une sous-suite $(x_{p_n})_{n>0}$ qui converge vers un réel $x \in [a,b]$. Comme

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |x_{p_n} - y_{p_n}| < \frac{1}{p_n},$$

la suite $(y_{p_n} - x_{p_n})_{n>0}$ converge vers 0, donc la suite $(y_{p_n})_{n>0}$ converge également vers $x$. Comme $f$ est continue en ce point, les suites $(f(x_{p_n}))_{n>0}$ et $(f(y_{p_n}))_{n>0}$ convergent vers $f(x)$. Cela contredit l'hypothèse :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |f(x_{p_n}) - f(y_{p_n})| \geq \delta.$$

Donc $f$ est uniformément continue. □

**Exemple 1.2.** La fonction
$$f : x \in ]0,1] \to \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$$
est continue ; elle n'est pas uniformément continue. En effet, pour tout $\eta > 0$, si
$$n := \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\eta}} \right\rfloor + 1,$$
on a
$$0 < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \eta$$
et
$$\left| f\Big(\frac{1}{n}\Big) - f\Big(\frac{1}{n+1}\Big) \right| = 1.$$
Cela montre que $f$ n'est pas uniformément continue.

**Définition 1.2.** Soit $[a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.
Une *subdivision* de $[a,b]$ est un ensemble fini $\sigma$ de points :
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$
Ces points sont les *points de la subdivision* ; les intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ (ou $]x_{i-1}, x_i[$), pour $1 \leq i \leq n$ sont les *intervalles de la subdivision* ; le nombre
$$h := \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$
est appelé le *pas de la subdivision*. Une subdivision $\tau := \{y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}, y_p\}$ est *plus fine* qu'une subdivision $\sigma := \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ si $\sigma \subset \tau$.

**Exemple 1.3.** Soit $[a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ ; soit $n > 0$ un entier. On note
$$x_i := a + i\frac{b-a}{n}, \text{ pour } 0 \leq i \leq n.$$
Alors $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ est la *subdivision uniforme de* $[a,b]$ *de pas* $\dfrac{b-a}{n}$.

**Remarque 1.1.** Soient $\sigma := \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}, \tau := \{y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}, y_p\}$ deux subdivisions d'un intervalle $[a,b]$. Alors $\sigma \cup \tau$ est une subdivision de $[a,b]$ plus fine que $\sigma$ et $\tau$.

**Définition 1.3.** Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est *en escalier* s'il existe une subdivision $\sigma := \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ de $[a,b]$ telle que $f$ soit constante sur chacun des intervalles ouverts $]x_{i-1}, x_i[$ de la subdivision [1]. Une telle subdivision est *adaptée* à la fonction en escalier.

**Exemple 1.4.** (1) La *fonction de Heaviside*
$$H(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
est une fonction en escalier sur tout intervalle $[a,b]$ contenant 0.

(2) La fonction *partie entière*
$$\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$

1. On note $f_{]x_{i-1},x_i[}$ la valeur de $f$ sur l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$

est une fonction en escalier sur tout intervalle $[a, b]$.

**Remarque 1.2.** On a les propriétés suivantes.

(1) Une fonction constante est en escalier sur tout intervalle $[a, b]$.

(2) Si $f$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$, alors $|f|$ est aussi une fonction en escalier sur $[a, b]$.

(3) Une fonction en escalier ne prend qu'un nombre fini de valeurs ; elle est donc bornée.

(4) Si $\sigma$ est adaptée à une fonction en escalier, toute subdivision plus fine lui est également adaptée.

(5) Soient $f, g$ deux fonctions définies sur $[a, b]$. Si $\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$ est fini, et si $f$ est en escalier sur $[a, b]$, alors $g$ est en escalier sur $[a, b]$.

(6) Soient $a < b < c$ des réels. Soient $f_1$ une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $f_2$ une fonction en escalier sur $[b, c]$ ; soit $f$ une fonction définie sur $[a, c]$, telle que

$$\forall x \in [a, b[ \quad f(x) = f_1(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in ]b, c] \quad f(x) = f_2(x),$$

alors $f$ est en escalier sur $[a, c]$.

(7) Si $f, g$ sont deux fonctions en escalier définies sur $[a, b]$ à valeurs réelles, alors les fonctions

$$\min(f, g) \quad \text{et} \quad \max(f, g)$$

sont des fonctions en escalier.

(8) Une fonction $f$ à valeurs complexes est en escalier sur $[a, b]$ si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont ; une subdivision adaptée à $f$ est la réunion d'une subdivision adaptée à $\operatorname{Re} f$ et d'une subdivision adaptée à $\operatorname{Im} f$.

**Proposition 1.1.** *L'ensemble des fonctions en escalier à valeurs réelles sur $[a, b]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}([a, b])$. Le produit de deux fonctions en escalier à valeurs réelles est une fonction en escalier à valeurs réelles.*

*L'ensemble des fonctions en escalier à valeurs complexes sur $[a, b]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, noté $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}([a, b])$. Le produit de deux fonctions en escalier à valeurs complexes est une fonction en escalier à valeurs complexes.*

Démonstration. (1) La fonction nulle est en escalier sur $[a, b]$. Si $f$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$. Soient $f, g$ deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ et $\sigma$ une subdivision associée à $f$, $\tau$ une subdivision adaptée à $g$. Alors $\sigma \cup \tau$ est plus fine que $\sigma$ et que $\tau$ : elle est adaptée à $f$ et à $g$. Les fonctions $f$ et $g$ sont donc constantes sur chacun des intervalles ouverts de cette subdivision ; donc $f + g$ l'est aussi : donc $f + g$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $\sigma \cup \tau$ est une subdivision associée. On démontre de même que $fg$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$. D'où le premier point.

(2) Le deuxième point se démontre de la même manière. □

**Lemme 1.1.** *Soit $f$ une fonction en escalier sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ ; soient $\sigma := \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ et $\tau := \{y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}, y_p\}$ deux subdivisions* *adaptées ; alors*

$$\sum_{i=1}^{n} f_{]x_{i-1},x_i[}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{j=1}^{p} f_{]y_{j-1},y_j[}(y_j - y_{j-1}).$$

Démonstration. (1) On suppose d'abord que $\tau$ est plus fine que $\sigma$. On note $x_{i,k}, 0 \leq i < n, 0 \leq k \leq m_i$ les points de $\tau$, avec

$$x_i = x_{i,0} < x_{i,1} < \cdots < x_{i,m_i-1} < x_{i,m_i} = x_{i+1}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{p} f_{]y_{j-1},y_j[}(y_j - y_{j-1}) &= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{m_i} f_{]x_{i,k-1},x_{i,k}[}(x_{i,k} - x_{i,k-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f_{]x_i,x_{i+1}[}\sum_{k=1}^{m_i}(x_{i,k} - x_{i,k-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f_{]x_i,x_{i+1}[}(x_{i+1} - x_i),\end{aligned}$$

qui établit le résultat.

(2) Dans le cas général, on considère la subdivision $\sigma \cup \tau$, qui est plus fine que $\sigma$ et que $\tau$ ; on utilise alors la première partie de la démonstration pour les subdivisions $\sigma$ et $\sigma \cup \tau$ d'une part et les subdivisions $\tau$ et $\sigma \cup \tau$ d'autre part. □

Grâce à ce lemme, on peut donner la définition suivante.

**Définition 1.4.** Soit $f$ une fonction en escalier sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ ; soit $\sigma := \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ une subdivision adaptée : on note $f_{i-1/2}$ la valeur de $f$ sur l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$. L'*intégrale de $f$ sur $[a, b]$* est :

$$\int_a^b f(x)dx := \sum_{i=1}^{n} f_{i-1/2}(x_i - x_{i-1}).$$

**Remarque 1.3.** L'intégrale d'une fonction en escalier ne dépend pas des valeurs que prend la fonction aux points $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ d'une subdivision qui lui est adaptée.

**Exemple 1.5.** Si $f = k$ est une fonction constante, alors

$$\int_a^b f(x)dx = k(b-a).$$

**Proposition 1.2.** *Si $f$ et $g$ sont deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ et si $\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$ est fini, alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

*En particulier, si $f$, définie sur $[a, b]$ est nulle en dehors d'un nombre fini de points de $[a, b]$, alors $f$ est une fonction en escalier et*

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Démonstration. Soient $\sigma$ une subdivision adaptée à $f$ et $\tau$ une subdivision adaptée à $g$ ; on note $E := \{x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)\}$. Alors $\sigma \cup \tau \cup E$ est une subdivision adapté à $f$ et à $g$ et $f = g$ sur chacun des intervalles ouverts de cette subdivision ; d'où le résultat. □

**Proposition 1.3.** *Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$.*

(1) *Si $f$ est une fonction en escalier sur $[a,c]$ et si $a < b < c$, alors $f$ est une fonction en escalier sur les intervalles $[a,b]$ et $[b,c]$ et*
$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$
(2) *Si $f$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$ et si $k \in \mathbb{R}$ ou $k \in \mathbb{C}$, alors*
$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$
(3) *Si $f$ et $g$ sont deux fonctions en escalier sur $[a,b]$, alors*
$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$
(4) *Si $f$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$ à valeurs positives ou nulles, alors*
$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$
(5) *Si $f$ et $g$ sont deux fonctions en escalier sur $[a,b]$, à valeurs réelles, telles que*
$$\forall x \in [a,b] \quad f(x) \leq g(x),$$
*alors*
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$
(6) *Si $f$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$, à valeurs complexes, alors*
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b Re\, f(x)dx + \imath \int_a^b Im\, f(x)dx$$
*c'est-à-dire*
$$Re \int_a^b f(x)dx = \int_a^b Re\, f(x)dx \quad et \quad Im \int_a^b f(x)dx = \int_a^b Im\, f(x)dx.$$

Démonstration. (1) Soit $\sigma$ une subdivision adaptée à $f$ et $\widehat{\sigma} := \sigma \cup \{b\}$. On note
$$\widehat{\sigma} = \{x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n\},$$
où $x_m = b$. On a
$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)dx &= \sum_{i=1}^m f_{i-1/2}(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=m+1}^n f_{i-1/2}(x_i - x_{i-1}) \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx\end{aligned}$$

(2) Soit $\sigma := \{x_1, \ldots, x_n\}$ une subdivision adaptée à $f$ : elle est adaptée à $kf$ et

$$\int_a^b (kf)(x)dx = \sum_{i=1}^n (kf)_{i-1/2}(x_i - x_{i-1}) = k\sum_{i=1}^n f_{i-1/2}(x_i - x_{i-1}) = k\int_a^b f(x)dx.$$

(3) Soit $\sigma := \{x_1, \ldots, x_n\}$ une subdivision adaptée à $f$ et à $g$ : elle est adaptée à $f+g$ et

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)(x)dx &= \sum_{i=1}^n (f+g)_{i-1/2}(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n f_{i-1/2}(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n g_{i-1/2}(x_i - x_{i-1}) \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

(4) Soit $\sigma := \{x_1, \ldots, x_n\}$ une subdivision adaptée à $f$ ; alors

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n f_{i-1/2}(x_i - x_{i-1}) \geq 0,$$

car

$$\forall i \;\; 1 \leq i \leq n \quad f_{i-1/2} \geq 0.$$

(5) Comme $g - f$ est une fonction en escalier à valeurs positives ou nulles

$$0 \leq \int_a^b (g-f)(x)dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx,$$

d'où le résultat.

(6) Soit $\sigma := \{x_1, \ldots, x_n\}$ une subdivision adaptée à $f$ : elle est adaptée à $\mathrm{Re}\, f$ et à $\mathrm{Im}\, f$.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n f_{i-1/2}(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^n (\mathrm{Re}\, f_{i-1/2} + \imath \mathrm{Im}\, f_{i-1/2})(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathrm{Re}\, f_{i-1/2}(x_i - x_{i-1}) + \imath \sum_{i=1}^n \mathrm{Im}\, f_{i-1/2}(x_i - x_{i-1}) \\ &= \int_a^b \mathrm{Re}\, f(x)dx + \imath \int_a^b \mathrm{Im}\, f(x)dx,\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

**Remarque 1.4.** L'application

$$f \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}}([a,b]) \to \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}$$

est donc linéaire. De même l'application

$$f \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}([a,b]) \to \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{C}$$

est linéaire.

**Proposition 1.4.** *Soit $f$ une fonction en escalier sur $[a, b]$ à valeurs réelles ou complexes. Alors*

$$\Big| \int_a^b f(x)dx \Big| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Démonstration. Soit $\sigma := \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ une subdivision adaptée à $f$ ; c'est également une subdivision adaptée à $|f|$ : on note $f_{i-1/2}$ la valeur de $f$ sur l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ ; alors $|f_{i-1/2}|$ est la valeur de $|f|$ sur cet intervalle. On a

$$\Big| \int_a^b f(x)dx \Big| = \Big| \sum_{i=1}^n f_{i-1/2}(x_i - x_{i-1}) \Big| \leq \sum_{i=1}^n |f_{i-1/2}|(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b |f(x)|dx,$$

d'où le résultat. □

**Remarque 1.5.** Si $f$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$ vérifiant

$$\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leq k,$$

où $k$ est un nombre positif ou nul, on a

$$\Big| \int_a^b f(x)dx \Big| \leq k(b - a).$$

**Définition 1.5.** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. On dit qu'elle est *intégrable au sens de Riemann* si, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe $g$ et $h$ deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que

$$\forall x \in [a, b] \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

et

$$\int_a^b (h(x) - g(x))dx < \varepsilon.$$

**Remarque 1.6.** (1) Toute fonction intégrable au sens de Riemann est bornée.
(2) Toute fonction en escalier est intégrable au sens de Riemann.

**Proposition 1.5.** *L'ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann sur un intervalle $[a, b]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On le note $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}([a, b])$.*

Démonstration. La fonction nulle est une fonction en escalier, et est donc intégrable.

Soit $f$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ ; soit $\varepsilon > 0$. il existe $g$ et $h$ deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que

$$\forall x \in [a, b] \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

et

$$\int_a^b (h(x) - g(x))dx < \varepsilon.$$

Alors $-g$ et $-h$ sont deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que

$$\forall x \in [a, b] \quad -h(x) \leq -f(x) \leq -g(x)$$

et

$$\int_a^b (-g(x) + h(x))dx < \varepsilon.$$

Donc $-f$ est une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.

Soient $f$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ et $k>0$ ; soit $\varepsilon>0$. Il existe $g$ et $h$ deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ telles que

$$\forall x \in [a,b] \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

et

$$\int_a^b (h(x)-g(x))dx < \frac{\varepsilon}{k}.$$

Alors $kg$ et $kh$ sont deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ telles que

$$\forall x \in [a,b] \quad kg(x) \leq kf(x) \leq kh(x)$$

et

$$\int_a^b (kh(x)-kg(x))dx = k\int_a^b (h(x)-g(x))dx < \varepsilon.$$

Donc $kf$ est une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.

Soient $f$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ et $k<0$. Alors $-kf$ est une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$, donc $kf$ est une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.

Soient $f_1$ et $f_2$ deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a,b]$ ; soit $\varepsilon>0$. Il existe $g_1$ et $h_1$ deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ telles que

$$\forall x \in [a,b] \quad g_1(x) \leq f_1(x) \leq h_1(x)$$

et

$$\int_a^b (h_1(x)-g_1(x))dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il existe $g_2$ et $h_2$ deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ telles que

$$\forall x \in [a,b] \quad g_2(x) \leq f_2(x) \leq h_2(x)$$

et

$$\int_a^b (h_2(x)-g_2(x))dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors $g_1+g_2$ et $h_1+h_2$ sont deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ telles que

$$\forall x \in [a,b] \quad (g_1+g_2)(x) \leq (f_1+f_2)(x) \leq (h_1+h_2)(x)$$

et

$$\int_a^b ((h_1+h_2)(x)-(g_1+g_2)(x))dx = \int_a^b (h_1(x)-g_1(x))dx + \int_a^b (h_2(x)-g_2(x))dx < \varepsilon.$$

Donc $f_1+f_2$ est une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$. $\square$

**Théorème 1.2.** *Soit $f$ une fonction à valeurs réelles bornée sur un intervalle $[a,b]$. On note $\mathcal{E}_-(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier $g$ telles que*

$$\forall x \in [a,b] \quad g(x) \leq f(x)$$

*et $\mathcal{E}_+(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier $h$ telles que*

$$\forall x \in [a,b] \quad f(x) \leq h(x).$$

*On définit*

$$I_-(f) = \sup_{g\in\mathcal{E}_-(f)} \int_a^b g(x)dx \quad \textit{et} \quad I_+(f) = \inf_{h\in\mathcal{E}_+(f)} \int_a^b h(x)dx.$$

*Alors $f$ est intégrable au sens de Riemann si et seulement si $I_-(f)=I_+(f)$.*

Démonstration. Comme $f$ est minorée par un réel $m$, l'ensemble $\mathcal{E}_-(f)$ n'est pas vide : il contient la fonction constante égale à $m$. De même comme $f$ est majorée par un réel $M$, l'ensemble $\mathcal{E}_+(f)$ n'est pas vide : il contient la fonction constante égale à $M$. L'ensemble

$$\left\{ \int_a^b g(x)dx : g \in \mathcal{E}_-(f) \right\}$$

est majoré par $M(b-a)$. De même l'ensemble

$$\left\{ \int_a^b h(x)dx : h \in \mathcal{E}_+(f) \right\}$$

est minoré par $m(b-a)$. Les nombres $I_-(f)$ et $I_+(f)$ sont bien des réels. On a évidemment

$$\forall g \in \mathcal{E}_-(f)\ \forall h \in \mathcal{E}_+(f) \qquad \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b h(x)dx.$$

Donc on a l'encadrement :

$$\forall g \in \mathcal{E}_-(f)\ \forall h \in \mathcal{E}_+(f) \qquad \int_a^b g(x)dx \leq I_-(f) \leq I_+(f) \leq \int_a^b h(x)dx.$$

(1) On suppose que $f$ est intégrable au sens de Riemann. Soit $\varepsilon > 0$ : il existe $g \in \mathcal{E}_-(f)$ et $h \in \mathcal{E}_+(f)$ tels que

$$\int_a^b h(x)dx - \int_a^b g(x)dx < \varepsilon.$$

Donc

$$0 \leq I_+(f) - I_-(f) < \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon$ est arbitraire, cela montre $I_-(f) = I_+(f)$.

(2) Réciproquement, on suppose $I_-(f) = I_+(f)$. Soit $\varepsilon > 0$ : il existe $g \in \mathcal{E}_-(f)$ et $h \in \mathcal{E}_+(f)$ tels que

$$I_-(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \int_a^b g(x)dx \quad \text{et} \quad \int_a^b h(x)dx < I_+(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent

$$\int_a^b h(x)dx - \int_a^b g(x)dx < I_+(f) + \frac{\varepsilon}{2} - I_-(f) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donc $f$ est intégrable au sens de Riemann. $\square$

**Définition 1.6.** Soit $f$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur un intervalle $[a,b]$. On reprend les notations du théorème 1.2 ; l'*intégrale de $f$ sur* $[a,b]$ est :

$$\int_a^b f(x)dx := I_-(f) = I_+(f).$$

**Remarque 1.7.** Si $f$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$, on a

$$\int_a^b f(x)dx \leq I_-(f) \leq I_+(f) \leq \int_a^b f(x)dx,$$

donc cette définition de l'intégrale coïncide avec la précédente (définition 1.4).

**Proposition 1.6.** *Soit $f$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur un intervalle $[a,b]$, à valeurs positives ou nulles : alors*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

DÉMONSTRATION. On reprend les notations du théorème 1.2. La fonction nulle appartient à $\mathcal{E}_-(f)$, donc $0 \leq I_-(f)$ : d'où le résultat. □

**Remarque 1.8.** Si $f$ est une fonction à valeurs réelles, intégrable sur un intervalle $[a,b]$, elle est minorée et majorée. Soient $m$ et $M$ des nombres tels que

$$\forall x \in [a,b] \quad m \leq f(x) \leq M.$$

Alors

$$m1_{[a,b]} \leq f \leq M1_{[a,b]},$$

donc

$$m1_{[a,b]} \in \mathcal{E}_-(f) \quad \text{et} \quad M1_{[a,b]} \in \mathcal{E}_+(f).$$

Par conséquent

$$m(b-a) = \int_a^b m1_{[a,b]}(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M1_{[a,b]}(x)dx = M(b-a),$$

et

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M.$$

**Définition 1.7.** Si $f$ est une fonction à valeurs réelles, intégrable sur un intervalle $[a,b]$, on appelle *valeur moyenne de $f$ sur $[a,b]$* le nombre

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

C'est un nombre compris entre $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

**Remarque 1.9.** Si $f$ est une fonction à valeurs réelles, intégrable sur un intervalle $[a,b]$, il existe

$$\mu \in \big[\inf_{x\in[a,b]} f(x), \sup_{x\in[a,b]} f(x)\big]$$

tel que

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a).$$

Si $f$ est continue sur $[a,b]$,

$$\exists c \in [a,b] \quad \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

**Théorème 1.3.** *Toute fonction à valeurs réelles, continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$, est intégrable au sens de Riemann.*

DÉMONSTRATION. Soit $f$ une fonction à valeurs réelles, continue sur un intervalle $[a,b]$. D'après le théorème de Heine (théorème 1.1), $f$ est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$ : on note

$$\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Il existe $\eta > 0$ tel que
$$|x-y| < \eta \text{ et } x, y \in [a,b] \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon'.$$
On choisit une subdivision uniforme de $[a,b]$ de pas $< \eta$ : soit
$$n := \left\lfloor \frac{b-a}{\eta} \right\rfloor + 1$$
et
$$x_i := a + i\frac{b-a}{n}, \quad 0 \leq i \leq n.$$
Soient $g$ et $h$ deux fonctions en escalier, telles que
$$\forall i \ 0 \leq i \leq n \quad g(x_i) = h(x_i) := f(x_i)$$
et, pour tout $1 \leq i \leq n$,
$$\forall x \in ]x_{i-1}, x_i[ \quad g(x) := f(x_i) - \varepsilon' \quad \text{et} \quad h(x) := f(x_i) + \varepsilon'.$$
On a, pour tout $1 \leq i \leq n$ et tout $x \in ]x_{i-1}, x_i[$,
$$0 < x_i - x < \frac{b-a}{n} < \eta,$$
donc
$$|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon',$$
par conséquent
$$g(x) = f(x_i) - \varepsilon' < f(x) < f(x_i) + \varepsilon' = h(x).$$
Par ailleurs
$$\int_a^b g(x)dx = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - \varepsilon')(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \varepsilon'(b-a)$$
et
$$\int_a^b h(x)dx = \sum_{i=1}^n (f(x_i) + \varepsilon')(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon'(b-a),$$
donc
$$\int_a^b h(x)dx - \int_a^b g(x)dx = 2\varepsilon'(b-a) = \varepsilon.$$
Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, cela prouve que $f$ est intégrable au sens de Riemann.
□

**Théorème 1.4.** *Toute fonction à valeurs réelles, monotone sur un intervalle fermé borné $[a,b]$, est intégrable au sens de Riemann.*

Démonstration. Soit $f$ une fonction à valeurs réelles, monotone sur un intervalle $[a,b]$. On peut supposer que $f$ est croissante, sinon, on fait la démonstration avec $-f$ et l'on utilise le résultat de la proposition 1.5. On peut également supposer que $f$ n'est pas constante (si elle l'est, elle est intégrable au sens de Riemann).

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit une subdivision uniforme $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a,b]$, de pas
$$h < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$
On définit $g$ et $h$ deux fonctions en escalier par : pour tout $1 \leq i \leq n$,
$$\forall x \in [x_{i-1}, x_i[ \quad g(x) := f(x_{i-1}) \quad \text{et} \quad h(x) := f(x_i)$$

et $g(b) = h(b) = f(b)$. On a

$$\forall x \in [a,b] \quad g(x) \le f(x) \le h(x)$$

et

$$\int_a^b g(x)dx = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \quad \text{et} \quad \int_a^b h(x)dx = \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}),$$

donc

$$\begin{aligned}\int_a^b h(x)dx - \int_a^b g(x)dx &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \\ &\le h \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = h(f(b) - f(a)) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, cela prouve que $f$ est intégrable au sens de Riemann. □

**Exemple 1.6.** Soit $E := [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ : la fonction $1_E$ n'est pas intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$. Soit $g$ une fonction en escalier telle que

$$\forall x \in [0,1] \quad g(x) \le 1_E(x).$$

Alors

$$\forall x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \quad g(x) \le 0.$$

Soit $x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ une subdivision adaptée à $g$ : pour tout $i$, $]x_{i-1}, x_i[ \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, donc $g \le 0$ sur $]x_{i-1}, x_i[$, par conséquent

$$\int_0^1 g(x)dx \le 0.$$

Soit $h$ une fonction en escalier telle que

$$\forall x \in [0,1] \quad 1_E(x) \le h(x).$$

Alors

$$\forall x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \quad h(x) \ge 1.$$

Soit $y_0 = 0 < y_1 < \cdots < y_p = 1$ une subdivision adaptée à $h$ : pour tout $j$, $]y_{j-1}, y_j[ \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$, donc $h \ge 1$ sur $]y_{j-1}, y_j[$, par conséquent

$$\int_0^1 h(x)dx \ge 1.$$

On en déduit

$$\int_0^1 h(x)dx - \int_0^1 g(x)dx \ge 1.$$

Donc $1_E$ n'est pas intégrable au sens de Riemann.

**Proposition 1.7.** *Soient $f_1, f_2$ deux fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle $[a,b]$. Si $f_1$ est intégrable au sens de Riemann et si $\{x \in [a,b] : f_1(x) \neq f_2(x)\}$ est fini, alors $f_2$ est intégrable au sens de Riemann et*

$$\int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b f_2(x)dx.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ : il existe $g_1 \in \mathcal{E}_-(f_1)$ et $h_1 \in \mathcal{E}_+(f_1)$ tels que

$$\int_a^b h_1(x)dx - \int_a^b g_1(x)dx < \varepsilon.$$

On peut définir $g_2 \in \mathcal{E}_-(f_2)$ et $h_2 \in \mathcal{E}_+(f_2)$ tels que les ensembles

$$\{x \in [a,b] : g_1(x) \neq g_2(x)\} \quad \text{et} \quad \{x \in [a,b] : h_1(x) \neq h_2(x)\}$$

soient finis ; donc

$$\int_a^b h_2(x)dx - \int_a^b g_2(x)dx = \int_a^b h_1(x)dx - \int_a^b g_1(x)dx < \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, cela prouve que $f_2$ est intégrable au sens de Riemann. Par ailleurs

$$\Big\{ \int_a^b g_1(x)dx : g_1 \in \mathcal{E}_-(f_1)\Big\} = \Big\{ \int_a^b g_2(x)dx : g_2 \in \mathcal{E}_-(f_2)\Big\}$$

donc $I_-(f_1) = I_-(f_2)$ ; par conséquent $\displaystyle\int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b f_2(x)dx.$ □

**Proposition 1.8.** *Soit $f$ une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle $[a,b]$, monotone sur $]a,b[$ et bornée. Alors elle est intégrable au sens de Riemann.*

Démonstration. On suppose que $f$ est croissante (sinon, on la remplace par $-f$). La restriction de la fonction $f$ à l'intervalle $]a,b[$ peut se prolonger en une fonction $\widetilde{f}$ monotone sur $[a,b]$ :

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \inf\limits_{]a,b[} f(x) & \text{si } x = a \\ f(x) & \text{si } x \in ]a,b[ \\ \sup\limits_{]a,b[} f(x) & \text{si } x = b \end{cases}$$

D'après le théorème 1.4, la fonction $\widetilde{f}$ est intégrable. Puis d'après la proposition 1.7 la fonction $f$ est intégrable. □

**Proposition 1.9.** *Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ à valeurs réelles. Elle est intégrable au sens de Riemann si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi$ et $\theta$ deux fonctions en escalier telles que*

$$\forall x \in [a,b] \quad |f(x) - \varphi(x)| \leq \theta(x), \tag{1.1}$$

$$\int_a^b \theta(x)dx < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Démonstration. (1) On suppose que $f$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $g$ et $h$ deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ telles que

$$\forall x \in [a,b] \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

et

$$\int_a^b (h(x) - g(x))dx < 2\varepsilon.$$

Les fonctions en escalier $\varphi$ et $\theta$ définies par

$$\varphi := \frac{1}{2}(g+h) \quad \text{et} \quad \theta := \frac{1}{2}(h-g)$$

vérifient (1.1) et (1.2).

(2) Réciproquement, on suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi$ et $\theta$ deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ qui vérifient (1.1) et (1.2). Soit $\varepsilon > 0$ : il existe donc $\varphi$ et $\theta$ en escalier telles que

$$\forall x \in [a,b] \quad |f(x) - \varphi(x)| \leq \theta(x),$$
$$\int_a^b \theta(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On définit deux fonctions en escalier $g$ et $h$ par

$$g := \varphi - \theta \quad \text{et} \quad h := \varphi + \theta.$$

Alors

$$\forall x \in [a,b] \quad g(x) = \varphi(x) - \theta(x) \leq f(x) \leq \varphi(x) + \theta(x) = h(x)$$

et

$$\int_a^b h(x)dx - \int_a^b g(x)dx = 2\int_a^b \theta(x)dx < \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, cela prouve que $f$ est intégrable au sens de Riemann. □

On peut alors étendre l'ensemble des fonctions intégrables aux fonctions à valeurs complexes.

**Définition 1.8.** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ (à valeurs réelles ou complexes). On dit qu'elle est intégrable au sens de Riemann si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi$ et $\theta$ deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que

$$\forall x \in [a,b] \quad |f(x) - \varphi(x)| \leq \theta(x), \tag{1.3}$$

$$\int_a^b \theta(x)dx < \varepsilon. \tag{1.4}$$

On note $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}([a, b])$ l'ensemble des fonctions définies sur $[a, b]$, à valeurs complexes, intégrables au sens de Riemann.

**Remarque 1.10.** Une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs complexes est intégrable au sens de Riemann si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont intégrables. On utilise pour cela les inégalités (avec les notations précédentes) :

$$|\mathrm{Re}\, f(x) - \mathrm{Re}\, \varphi(x)| \leq |f(x) - \varphi(x)| \quad \text{et} \quad |\mathrm{Im}\, f(x) - \mathrm{Im}\, \varphi(x)| \leq |f(x) - \varphi(x)|,$$
$$|f(x) - \varphi(x)| \leq |\mathrm{Re}\, f(x) - \mathrm{Re}\, \varphi(x)| + |\mathrm{Im}\, f(x) - \mathrm{Im}\, \varphi(x)|.$$

On en déduit que toute fonction intégrable au sens de Riemann (à valeurs réelles ou complexes) est bornée.

**Théorème 1.5.** *Toute fonction à valeurs complexes, continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, est intégrable au sens de Riemann.*

**Proposition 1.10.** *Soit $f$ une fonction (à valeurs réelles ou complexes) définie sur un intervalle $[a, b]$. Elle est intégrable au sens de Riemann si et seulement s'il* *existe deux suites* $(\varphi_n)_n$ *et* $(\theta_n)_n$ *de fonctions en escalier sur* $[a,b]$ *telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a,b] \quad |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \theta_n(x), \tag{1.5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \theta_n(x)dx = 0. \tag{1.6}$$

*On dira alors que les suites* $(\varphi_n)_n$ *et* $(\theta_n)_n$ *sont* associées *à la fonction* $f$ *(si* $f$ *est à valeurs réelles, on peut se limiter à des fonctions* $\varphi_n$ *à valeurs réelles).*

Démonstration. (1) On suppose que $f$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\varphi_n$ et $\theta_n$ deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ telles que

$$\forall x \in [a,b] \quad |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \theta_n(x)$$

et

$$\int_a^b \theta_n(x)dx < \frac{1}{n}.$$

Les suites $(\varphi_n)_{n>0}$ et $(\theta_n)_{n>0}$ vérifient (1.5) et (1.6).

(2) Réciproquement, on suppose qu'il existe deux suites $(\varphi_n)_n$ et $(\theta_n)_n$ de fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui vérifient (1.5) et (1.6). Soit $\varepsilon > 0$ : il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int_a^b \theta_n(x)dx < \varepsilon.$$

Et on a

$$\forall x \in [a,b] \quad |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \theta_n(x).$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, cela prouve que $f$ est intégrable au sens de Riemann. □

**Définition 1.9.** Soit $f$ une fonction (à valeurs réelles ou complexes) définie sur un intervalle $[a,b]$, intégrable au sens de Riemann ; soient $(\varphi_n)_n$ et $(\theta_n)_n$ deux suites de fonctions en escalier sur $[a,b]$ associées à $f$. On appelle *intégrale de* $f$ *sur* $[a,b]$ le nombre

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx.$$

**Remarque 1.11.** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ (à valeurs réelles ou complexes), intégrable au sens de Riemann.

(1) Soient $(\varphi_n)_n$ et $(\theta_n)_n$ deux suites associées à la fonction $f$. Si $p, q$ sont deux entiers, on a

$$|f(x) - \varphi_p(x)| \leq \theta_p(x) \quad \text{et} \quad |\varphi_q(x) - f(x)| \leq \theta_q(x),$$

donc

$$|\varphi_q(x) - \varphi_p(x)| \leq \theta_p(x) + \theta_q(x).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \varphi_q(x)dx - \int_a^b \varphi_p(x)dx\right| = \left|\int_a^b (\varphi_q(x) - \varphi_p(x))dx\right| &\leq \int_a^b |\varphi_q(x) - \varphi_p(x)|dx \\ &\leq \int_a^b (\theta_p(x) + \theta_q(x))dx = \int_a^b \theta_p(x)dx + \int_a^b \theta_q(x)dx.\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n$ entier tel que

$$\forall p \geq n \quad \int_a^b \theta_p(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors

$$\forall p \geq n \ \forall q \geq n \quad \left| \int_a^b \varphi_q(x)dx - \int_a^b \varphi_p(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Cela prouve que la suite

$$\left( \int_a^b \varphi_n(x)dx \right)_n$$

est une suite de Cauchy : elle converge donc.

(2) Soient $(\psi_n)_n$ et $(\kappa_n)_n$ deux autres suites associées à la fonction $f$. Si $p$ est un entier, on a

$$|f(x) - \varphi_p(x)| \leq \theta_p(x) \quad \text{et} \quad |\psi_p(x) - f(x)| \leq \kappa_p(x),$$

donc

$$|\psi_p(x) - \varphi_p(x)| \leq \theta_p(x) + \kappa_p(x).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \psi_p(x)dx - \int_a^b \varphi_p(x)dx \right| = \left| \int_a^b (\psi_p(x) - \varphi_p(x))dx \right| &\leq \int_a^b |\psi_p(x) - \varphi_p(x)|dx \\ \leq \int_a^b (\theta_p(x) + \kappa_p(x))dx &= \int_a^b \theta_p(x)dx + \int_a^b \kappa_p(x)dx. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n'$ entier tel que

$$\forall p \geq n' \quad \int_a^b \theta_p(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, il existe $n''$ entier tel que

$$\forall p \geq n'' \quad \int_a^b \kappa_p(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, si $n := \max(n', n'')$

$$\forall p \geq n \quad \left| \int_a^b \psi_p(x)dx - \int_a^b \varphi_p(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Cela prouve que les suites convergentes

$$\left( \int_a^b \varphi_n(x)dx \right)_n \quad \text{et} \quad \left( \int_a^b \psi_n(x)dx \right)_n$$

ont la même limite.

(3) On suppose que $f$ est à valeurs réelles. Soient $(\varphi_n)_n$ et $(\theta_n)_n$ deux suites associées à $f$. On définit deux suites de fonctions en escalier $(g_n)_n$ et $(h_n)_n$ par

$$g_n := \varphi_n - \theta_n \quad \text{et} \quad h_n := \varphi_n + \theta_n.$$

On a vu, dans la démonstration de la proposition 1.9 :

$$\forall x \in [a, b] \quad g_n(x) \leq f(x) \leq h_n(x)$$

D'après le théorème 1.2, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\int_a^b g_n(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b h_n(x)dx,$$

donc

$$-\int_a^b \theta_n(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi_n(x)dx \leq \int_a^b \theta_n(x)dx,$$

et par conséquent

$$\Big|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi_n(x)dx\Big| \leq \int_a^b \theta_n(x)dx.$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \theta_n(x)dx = 0,$$

on a

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx,$$

donc la définition précédente de l'intégrale coïncide avec la définition initiale, pour des fonctions à valeurs réelles.

**Proposition 1.11.** *Soit $f$ une fonction à valeurs complexes définie sur un intervalle $[a,b]$. Elle est intégrable au sens de Riemann si et seulement si $Re\, f$ et $Im\, f$ sont intégrables au sens de Riemann. Dans ce cas*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b Re\, f(x)dx + \imath \int_a^b Im\, f(x)dx,$$

*c'est-à-dire*

$$Re\left(\int_a^b f(x)dx\right) = \int_a^b Re\, f(x)dx \quad et \quad Im\left(\int_a^b f(x)dx\right) = \int_a^b Im\, f(x)dx.$$

Démonstration. (1) Supposons $f$ intégrable au sens de Riemann. Si $(\varphi_n)_n$ et $(\theta_n)_n$ sont deux suites associées à $f$, alors $(\mathrm{Re}\,\varphi_n)_n$ et $(\theta_n)_n$ sont deux suites associées à $\mathrm{Re}\, f$ et $(\mathrm{Im}\,\varphi_n)_n$ et $(\theta_n)_n$ sont deux suites associées à $\mathrm{Im}\, f$ : on utilise les inégalités de la remarque 1.10. On a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b \mathrm{Re}\,\varphi_n(x)dx + \imath \int_a^b \mathrm{Im}\,\varphi_n(x)dx\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b \mathrm{Re}\,\varphi_n(x)dx + \imath \lim_{n\to\infty} \int_a^b \mathrm{Im}\,\varphi_n(x)dx \\ &= \int_a^b \mathrm{Re}\, f(x)dx + \imath \int_a^b \mathrm{Im}\, f(x)dx.\end{aligned}$$

(2) Supposons $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ intégrables au sens de Riemann. Si $(\varphi_n)_n$ et $(\theta_n)_n$ sont deux suites associées à $\mathrm{Re}\, f$ et $(\psi_n)_n$ et $(\kappa_n)_n$ sont deux suites associées à $\mathrm{Im}\, f$, alors $(\varphi_n + \imath\psi_n)_n$ et $(\theta_n + \kappa_n)_n$ sont deux suites associées à $f$ : on utilise les inégalités

de la remarque 1.10. On a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b (\varphi_n(x) + \imath\psi_n(x))dx = \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b \varphi_n(x)dx + \imath\int_a^b \psi_n(x)\right)dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)dx + \imath\lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi_n(x)dx\\ &= \int_a^b \operatorname{Re} f(x)dx + \imath\int_a^b \operatorname{Im} f(x)dx.\end{aligned}$$

(3) De cette égalité, on déduit

$$\operatorname{Re}\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x)dx \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \operatorname{Im} f(x)dx.$$

D'où la conclusion. □

**Remarque 1.12.** Le résultat précédent montre que si $f$ est en escalier, à valeurs complexes, l'intégrale que l'on a définie coïncide avec l'intégrale d'une fonction en escalier, définie initialement.

**Proposition 1.12.** *Soient $f_1, f_2$ deux fonctions à valeurs réelles ou complexes définies sur un intervalle $[a, b]$. Si $f_1$ est intégrable au sens de Riemann et si $\{x \in [a, b] : f_1(x) \neq f_2(x)\}$ est fini, alors $f_2$ est intégrable au sens de Riemann et*

$$\int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b f_2(x)dx.$$

Démonstration. Si $f_1$ est intégrable au sens de Riemann, alors $\operatorname{Re} f_1$ et $\operatorname{Im} f_1$ sont intégrables. Comme

$$\{x \in [a, b] : \operatorname{Re} f_1(x) \neq \operatorname{Re} f_2(x)\} \quad \text{et} \quad \{x \in [a, b] : \operatorname{Im} f_1(x) \neq \operatorname{Im} f_2(x)\}$$

sont finis, on déduit de la proposition 1.7 que $\operatorname{Re} f_2$ et $\operatorname{Im} f_2$ sont intégrables et

$$\int_a^b \operatorname{Re} f_1(x)dx = \int_a^b \operatorname{Re} f_2(x)dx \qquad \int_a^b \operatorname{Im} f_1(x)dx = \int_a^b \operatorname{Im} f_2(x)dx.$$

D'où le résultat, d'après la proposition 1.11. □

**Proposition 1.13** (Relation de Chasles)**.** *Soient $a < b < c$ des réels et $f_1$ une fonction définie sur $[a, b]$, $f_2$ une fonction définie sur $[b, c]$. Soit $f$ une fonction telle que*

$$\forall x \in [a, b[ \quad f(x) = f_1(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in ]b, c] \quad f(x) = f_2(x),$$

*alors $f$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, c]$ si et seulement si $f_1$ est intégrable sur $[a, b]$ et $f_2$ est intégrable sur $[b, c]$. On a*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_b^c f_2(x)dx.$$

Démonstration. (1) On suppose que $f$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, c]$. On note $\widetilde{f_1}$ sa restriction à $[a, b]$. Soient $(\varphi_n)_n$ et $(\theta_n)_n$ deux suites associées à la fonction $f$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a, b] \quad |\widetilde{f_1}(x) - \varphi_n(x)| \leq \theta_n(x).$$

Si

$$\underline{\theta}_n(x) := \begin{cases} \theta_n(x) & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si } b < x \leq c \end{cases}$$

on a

$$\forall x \in [a,c] \quad \underline{\theta}_n(x) \leq \theta_n(x),$$

donc

$$0 \leq \int_a^b \theta_n(x)dx = \int_a^c \underline{\theta}_n(x)dx \leq \int_a^c \theta_n(x)dx.$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^c \theta_n(x)dx = 0,$$

on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \theta_n(x)dx = 0.$$

Donc $(\varphi_n)_n$ et $(\theta_n)_n$ sont associées à $\widetilde{f_1}$ ; par conséquent, celle-ci est intégrable sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b \widetilde{f_1}(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx.$$

Comme $f_1$ et $\widetilde{f_1}$ diffèrent en au plus un point, on déduit de la proposition 1.12 que $f_1$ est intégrable sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b f_1(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx.$$

On démontre de même que $f_2$ est intégrable sur $[b,c]$ et

$$\int_b^c f_2(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_b^c \varphi_n(x)dx.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \int_a^c \varphi_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \left( \int_a^b \varphi_n(x)dx + \int_b^c \varphi_n(x)dx \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx + \lim_{n\to\infty} \int_b^c \varphi_n(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_b^c f_2(x)dx.\end{aligned}$$

(2) On suppose que $f_1$ est intégrable sur $[a,b]$ et que $f_2$ est intégrable sur $[b,c]$. Soient $(\varphi_{1,n})_n$ et $(\theta_{1,n})_n$ deux suites associées à la fonction $f_1$ et $(\varphi_{2,n})_n$ et $(\theta_{2,n})_n$ deux suites associées à la fonction $f_2$. Il existe deux suites $(\varphi_n)_n$ et $(\theta_n)_n$ de fonctions en escalier sur $[a,c]$ qui vérifient :

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \varphi_{n,1}(x) & \text{si } x \in [a,b[ \\ f(b) & \text{si } x = b \\ \varphi_{n,2}(x) & \text{si } x \in ]b,c] \end{cases} \quad \text{et} \quad \theta_n(x) = \begin{cases} \theta_{n,1}(x) & \text{si } x \in [a,b[ \\ 0 & \text{si } x = b \\ \theta_{n,2}(x) & \text{si } x \in ]b,c]. \end{cases}$$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a,c] \quad |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \theta_n(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^c \theta_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \theta_{n,1}(x)dx + \lim_{n\to\infty} \int_b^c \theta_{n,2}(x)dx = 0.$$

Donc $f$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, c]$. De plus

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^c \varphi_n(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_{n,1}(x)dx + \lim_{n\to\infty}\int_b^c \varphi_{n,2}(x)dx\\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx,\end{aligned}$$

d'où la conclusion. □

**Remarque 1.13.** Soit $f$ une fonction intégrable sur un intervalle $[a, b]$ ; soit $[c, d]$ un intervalle contenant $[a, b]$ et $f_0$ la fonction qui prolonge $f$ par 0 sur $[c, d] \setminus [a, b]$. Alors $f_0$ est intégrable sur $[c, d]$ et

$$\int_c^d f_0(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

**Définition 1.10.** Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $\sigma := \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $i$ (avec $1 \leq i \leq n$), $f$ soit continue sur l'intervalle ouvert $]x_{i-1}, x_i[$ et ait une limite à droite (finie) en $x_{i-1}$ et une limite à gauche (finie) en $x_i$. Une telle subdivision est *adaptée* à la fonction $f$.

**Remarque 1.14.** On a les propriétés suivantes.

(1) Une fonction en escalier sur un intervalle $[a, b]$ est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$.

(2) Une fonction continue sur un intervalle $]a, b[$, qui a une limite à droite (finie) en $a$ et une limite à gauche (finie) en $b$ est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$.

(3) Si $f$ est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, alors $|f|$ est aussi une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$.

(4) Si $\sigma$ est adaptée à une fonction $f$ continue par morceaux, toute subdivision plus fine lui est également adaptée.

(5) Soient $f, g$ deux fonctions définies sur $[a, b]$. Si $\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$ est fini, et si $f$ est continue par morceaux sur $[a, b]$, alors $g$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.

(6) Soient $a < b < c$ des réels. Soient $f_1$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et $f_2$ une fonction continue par morceaux sur $[b, c]$ ; soit $f$ une fonction définie sur $[a, c]$, telle que

$$\forall x \in [a, b[ \quad f(x) = f_1(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in ]b, c] \quad f(x) = f_2(x),$$

alors $f$ est continue par morceaux sur $[a, c]$.

(7) Une fonction $f$ à valeurs complexes définie sur un intervalle $[a, b]$ est continue par morceaux si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont ; une subdivision adaptée à $f$ est la réunion d'une subdivision adaptée à $\operatorname{Re} f$ et d'une subdivision adaptée à $\operatorname{Im} f$.

**Proposition 1.14.** *Toute fonction continue par morceaux est bornée.*

Démonstration. Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ et soit $\sigma := \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à $f$. La fonction $f$ peut se prolonger continûment sur chacun des intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ et est donc bornée. Elle est donc bornée sur chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$. Finalement $f$ est bornée par

$$\max\big(\max_{1\le i\le n}\sup_{x\in]x_{i-1},x_i[}|f(x)|, \max_{0\le i\le n}|f(x_i)|\big).$$

D'où la conclusion. □

**Proposition 1.15.** *L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs réelles est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs complexes est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$*

DÉMONSTRATION. (1) La fonction nulle est continue par morceaux sur $[a, b]$. Si $f$ est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f$ est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Soient $f, g$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ et $\sigma$ une subdivision adaptée à $f$, $\tau$ une subdivision adaptée à $g$. Alors $\sigma \cup \tau$ est plus fine que $\sigma$ et que $\tau$ : elle est adaptée à $f$ et à $g$. Sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ de la subdivision $\sigma \cup \tau$, les fonctions $f$ et $g$ sont continues ; donc $f + g$ l'est aussi. Les fonctions $f$ et $g$ ont une limite à droite en $x_{i-1}$ : donc $f + g$ aussi. Les fonctions $f$ et $g$ ont une limite à gauche en $x_i$ : donc $f + g$ aussi. Finalement $f + g$ est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et $\sigma \cup \tau$ est une subdivision adaptée. D'où le premier point.

(2) Le second point se démontre de la même manière. □

**Proposition 1.16.** *Si $f$ est une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$, elle est intégrable au sens de Riemann. Si $\sigma := \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ est une subdivision de $[a, b]$ adaptée à $f$, alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx.$$

DÉMONSTRATION. Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ et soit $\sigma := \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à $f$. Pour tout $i$, la restriction de $f$ à $]x_{i-1}, x_i[$ peut se prolonger continûment sur $[x_{i-1}, x_i]$, donc elle est intégrable sur cet intervalle. La conclusion résulte alors de la proposition 1.13. □

**Définition 1.11.** Une fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est *monotone par morceaux* s'il existe une subdivision $\sigma := \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $i$ (avec $1 \le i \le n$), $f$ soit monotone sur l'intervalle ouvert $]x_{i-1}, x_i[$. Une telle subdivision est *adaptée* à la fonction $f$.

**Remarque 1.15.** On a les propriétés suivantes.

(1) Une fonction monotone sur un intervalle $[a, b]$ est bornée et est une fonction monotone par morceaux sur $[a, b]$.

(2) Si $\sigma$ est adaptée à une fonction $f$ bornée, monotone par morceaux, toute subdivision plus fine lui est également adaptée.

(3) Soient $f, g$ deux fonctions à valeurs réelles définies sur $[a, b]$. Si $\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$ est fini, et si $f$ est bornée, monotone par morceaux sur $[a, b]$, alors $g$ est bornée, monotone par morceaux sur $[a, b]$.

(4) Soient $a < b < c$ des réels. Soient $f_1$ une fonction bornée, monotone par morceaux sur $[a, b]$ et $f_2$ une fonction bornée, monotone par morceaux sur $[b, c]$ ; soit $f$ une fonction définie sur $[a, c]$ à valeurs réelles telle que

$$\forall x \in [a, b[ \quad f(x) = f_1(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in ]b, c] \quad f(x) = f_2(x),$$

alors $f$ est bornée, monotone par morceaux sur $[a, c]$.

**Proposition 1.17.** *Si $f$ est une fonction bornée, monotone par morceaux sur un intervalle $[a, b]$, elle est intégrable au sens de Riemann. Si $\sigma$ est une subdivision de $[a, b]$ adaptée à $f$, avec $\sigma := \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$, alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx.$$

Démonstration. Soit $f$ une fonction bornée, monotone par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ et soit $\sigma := \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à $f$. Pour tout $i$, la restriction de $f$ à $]x_{i-1}, x_i[$ peut se prolonger par continuité en une fonction monotone sur $[x_{i-1}, x_i]$, donc elle est intégrable sur cet intervalle. La conclusion résulte alors de la proposition 1.13. □

## 2. Propriétés de l'intégrale

**Proposition 1.18.** *Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.*

(1) *Si $f$ est une fonction intégrable sur $[a, b]$ (à valeurs réelles ou complexes) et si $k \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors*

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

(2) *Si $f$ et $g$ sont deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ (à valeurs réelles ou complexes), alors*

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Démonstration. (1) Soient $(\varphi_n)_n$ et $(\theta_n)_n$ deux suites de fonctions en escalier associées à la fonction $f$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in [a, b] \quad |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \theta_n(x),$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in [a, b] \quad |kf(x) - k\varphi_n(x)| \leq |k|\theta_n(x).$$

On a

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \theta_n(x)dx = 0,$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |k|\theta_n(x)dx = 0.$$

Par conséquent $(k\varphi_n)_n$ et $(|k|\theta_n)_n$ sont deux suites de fonctions en escalier associées à la fonction $kf$ ; donc

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b k\varphi_n(x)dx = k \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

C'est le premier point.

(2) Soient $(\varphi_n)_n$ et $(\theta_n)_n$ deux suites de fonctions en escalier associées à la fonction $f$ et $(\psi_n)_n$ et $(\kappa_n)_n$ deux suites de fonctions en escalier associées à la fonction $g$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a,b] \quad |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \theta_n(x),$$
$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a,b] \quad |g(x) - \psi_n(x)| \leq \kappa_n(x).$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a,b] \quad |f(x) + g(x) - \varphi_n(x) - \psi_n(x)| \leq \theta_n(x) + \kappa_n(x).$$

On a

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \theta_n(x)dx = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b \kappa_n(x)dx = 0,$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (\theta_n(x) + \kappa_n(x))dx = 0.$$

Par conséquent $(\varphi_n + \psi_n)_n$ et $(\theta_n + \kappa_n)_n$ sont deux suites de fonctions en escalier associées à la fonction $f+g$ ; donc

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\varphi_n + \psi_n)(x)dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx + \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

**Remarque 1.16.** D'après la proposition 1.18, l'ensemble $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}([a,b])$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et l'application

$$f \in \mathcal{R}_{\mathbb{R}}([a,b]) \to \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}$$

est linéaire. De même l'ensemble $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}([a,b])$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et l'application

$$f \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}([a,b]) \to \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{C}$$

est linéaire.

**Proposition 1.19.** *Soit $[a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et soient $f$ et $g$ deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, à valeurs réelles telles que*

$$\forall x \in [a,b] \quad f(x) \leq g(x).$$

*Alors*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Démonstration. On a

$$\forall x \in [a,b] \quad g(x) - f(x) \geq 0,$$

donc

$$\int_a^b (g(x) - f(x))dx \geq 0,$$

d'après la proposition 1.6 ; par conséquent

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0,$$

d'après la proposition 1.18 : d'où le résultat. □

**Théorème 1.6.** *Soit $[a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$, à valeurs positives ou nulles. Si*

$$\int_a^b f(x)dx = 0,$$

*alors $f$ est identiquement nulle.*

Démonstration. Supposons

$$\exists x_0 \in [a,b] \quad f(x_0) > 0.$$

Comme la fonction $f$ est continue au point $x_0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [a,b] \quad |x - x_0| < \eta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2} \;\Rightarrow\; f(x) > \frac{f(x_0)}{2}.$$

Donc, en notant $I := ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[ \cap [a,b]$

$$\forall x \in [a,b] \quad f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} 1_I(x).$$

Si $\ell(I)$ est la longueur de $I$, on a

$$\int_a^b f(x)dx \geq \frac{f(x_0)}{2}\ell(I) > 0.$$

Ceci est impossible : d'où la conclusion. □

**Corollaire.** *Si $f$ est une fonction continue sur $[a,b]$, à valeurs réelles ou complexes et si*

$$\int_a^b |f(x)|dx = 0,$$

*alors $f$ est identiquement nulle.*

**Remarque 1.17.** Soit $f := 1_{[0,1/2[} - 1_{[1/2,1[}$. On a

$$\int_0^1 f(x)dx = 0.$$

Soit $g := 1_{\{0\}}$. On a

$$\int_0^1 g(x)dx = 0.$$

Aucune de ces fonctions n'est identiquement nulle.

**Théorème 1.7.** *Soit $[a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et soit $f$ une fonction intégrable sur $[a,b]$, à valeurs réelles ou complexes. Alors $|f|$ est une fonction intégrable et l'on a*

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

DÉMONSTRATION. Soient $(\varphi_n)_n$ et $(\theta_n)_n$ deux suites de fonctions en escalier associées à la fonction $f$. Chaque fonction $|\varphi_n|$ est en escalier. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a,b] \quad |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \theta_n(x),$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a,b] \quad \big||f(x)| - |\varphi_n(x)|\big| \leq \theta_n(x).$$

On a

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \theta_n(x)dx = 0.$$

Par conséquent $(|\varphi_n|)_n$ et $(\theta_n)_n$ sont deux suites de fonctions en escalier associées à la fonction $|f|$ ; donc celle-ci est intégrable.

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| = \lim_{n\to\infty} \Big|\int_a^b \varphi_n(x)dx\Big| \leq \lim_{n\to\infty} \int_a^b |\varphi_n(x)|dx = \int_a^b |f(x)|dx.$$

D'où le résultat. □

On en déduit immédiatement le résultat suivant.

**Corollaire 1.** *Soit $f$ une fonction intégrable sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. Si*

$$\forall x \in [a,b] \quad |f(x)| \leq K,$$

*alors*

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \leq K(b-a).$$

DÉMONSTRATION. On écrit

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b K dx = K(b-a).$$

D'où le résultat. □

**Corollaire 2.** *Si $f$ et $g$ sont deux fonctions intégrables sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, alors*

$$\min(f,g) \quad \textit{et} \quad \max(f,g)$$

*sont intégrables sur $[a,b]$. En particulier les fonctions*

$$f^- := \max(-f,0) \quad \textit{et} \quad f^+ := \max(f,0)$$

*sont intégrables sur $[a,b]$*

DÉMONSTRATION. On écrit

$$\min(f,g) = \frac{1}{2}\big(f+g-|g-f|\big) \quad \text{et} \quad \max(f,g) = \frac{1}{2}\big(f+g+|g-f|\big).$$

D'où le résultat. □

**Remarque 1.18.** Soit $f$ une fonction intégrable sur un intervalle $[a,b]$ ; soient $(\varphi_n)_n$ et $(\theta_n)_n$ deux suites de fonctions en escalier associées à la fonction $f$. Soit $K$ une borne de $f$. On définit deux suites de fonctions en escalier $(\widetilde{\varphi}_n)_n$ et $(\widetilde{\theta}_n)_n$ de la manière suivante. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$E_n := \{x \in [a,b] : \theta_n(x) \leq K\} \quad \text{et} \quad E_n^c := \{x \in [a,b] : \theta_n(x) > K\}$$

Ce sont des unions finies d'intervalles. Soient

$$\widetilde{\varphi}_n := \varphi_n 1_{E_n} \quad \text{et} \quad \widetilde{\theta}_n := \theta_n 1_{E_n} + K 1_{E_n^c} = \min(\theta_n, K).$$

Ce sont deux fonctions en escalier. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall x \in [a,b] \quad |f(x) - \widetilde{\varphi}_n(x)| \leq \widetilde{\theta}_n(x),$$

et comme $0 \leq \widetilde{\theta}_n \leq \theta_n$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \widetilde{\theta}_n(x)dx = 0.$$

Donc les suites $(\widetilde{\varphi}_n)_n$ et $(\widetilde{\theta}_n)_n$ sont associées à la fonction $f$ et toutes les fonctions $\widetilde{\theta}_n$ sont majorées par $K$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a,b]$,

$$|\widetilde{\varphi}_n(x)| \leq |\widetilde{\varphi}_n(x) - f(x)| + |f(x)| \leq \widetilde{\theta}_n(x) + K \leq 2K,$$

donc toutes les fonctions $\widetilde{\varphi}_n$ sont majorées par $2K$.

**Proposition 1.20.** *Si $f$ et $g$ sont deux fonctions intégrables sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes, alors la fonction $fg$ est intégrable sur $[a,b]$.*

Démonstration. Soit $K_f$ un nombre tel que

$$\forall x \in [a,b] \quad |f(x)| \leq K_f.$$

Soient $(\varphi_n)_n$ et $(\theta_n)_n$ deux suites de fonctions en escalier associées à la fonction $f$ et $(\psi_n)_n$ et $(\kappa_n)_n$ deux suites de fonctions en escalier associées à la fonction $g$. D'après la remarque 1.18, on peut supposer

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a,b] \quad \varphi_n(x) \leq 2K_f.$$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a,b] \quad |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \theta_n(x).$$

Soit $K_g$ un nombre tel que

$$\forall x \in [a,b] \quad |g(x)| \leq K_g.$$

On a aussi

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a,b] \quad |g(x) - \psi_n(x)| \leq \kappa_n(x).$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a,b]$

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - \varphi_n(x)\psi_n(x)| &= |(f(x) - \varphi_n(x))g(x) + \varphi_n(x)(g(x) - \psi_n(x))| \\ &\leq |f(x) - \varphi_n(x)|\,|g(x)| + |\varphi_n(x)|\,|g(x) - \psi_n(x)| \\ &\leq K_g\theta_n(x) + 2K_f\kappa_n(x). \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \theta_n(x)dx = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b \kappa_n(x)dx = 0,$$

on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (K_g\theta_n(x) + 2K_f\kappa_n(x))dx = 0.$$

Par conséquent $(\varphi_n\psi_n)_n$ et $(K_g\theta_n + 2K_f\kappa_n)_n$ sont deux suites de fonctions en escalier associées à la fonction $fg$ ; donc celle-ci est intégrable. □

**Proposition 1.21.** *Si $f$ et $g$ sont deux fonctions intégrables sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, on a*

$$\Big|\int_a^b f(x)g(x)dx\Big| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \int_a^b |g(x)|dx.$$

Démonstration. D'après la proposition 1.20, la fonction $fg$ est intégrable. Comme

$$\forall x \in [a, b] \quad |f(x)g(x)| \leq \big(\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|\big)|g(x)|,$$

on a, d'après le théorème 1.7,

$$\Big|\int_a^b f(x)g(x)dx\Big| \leq \int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \int_a^b \big(\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|\big)|g(x)|dx,$$

d'après la proposition 1.19 : d'où le résultat. □

**Proposition 1.22** (Première formule de la moyenne)**.** *Si $f$ et $g$ sont deux fonctions à valeurs réelles, intégrables sur un intervalle $[a, b]$, et si la fonction $g$ a un signe constant, alors il existe*

$$\mu \in \big[\inf_{x\in[a,b]} f(x), \sup_{x\in[a,b]} f(x)\big]$$

*tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

*Si $f$ est continue sur $[a, b]$,*

$$\exists c \in [a, b] \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Démonstration. On peut supposer

$$\forall x \in [a, b] \quad g(x) \geq 0.$$

Sinon, on démontre le résultat pour $-g$, ce qui donne le résultat pour $g$. On note

$$m := \inf_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad M := \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Alors,

$$\forall x \in [a, b] \quad m \leq f(x) \leq M,$$

donc

$$\forall x \in [a, b] \quad mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

Par conséquent

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

• Si

$$\int_a^b g(x)dx = 0,$$

on a

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0,$$

donc le résultat est démontré.
• Si
$$\int_a^b g(x)dx > 0,$$
on a
$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M,$$
Donc, il existe $\mu \in [m, M]$ tel que
$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \mu,$$
soit
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$
Si $f$ est continue, il existe, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $c \in [a, b]$ tel que $\mu = f(c)$, donc
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$
C'est le résultat. □

**Théorème 1.8** (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Si $f$ et $g$ sont deux fonctions intégrables sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes, alors*
$$\Big| \int_a^b f(x)\overline{g}(x)dx \Big| \leq \Big( \int_a^b |f(x)|^2 dx \Big)^{1/2} \Big( \int_a^b |g(x)|^2 dx \Big)^{1/2}.$$

Démonstration. D'après le théorème 1.7, on a
$$\Big| \int_a^b f(x)g(x)dx \Big| \leq \int_a^b |f(x)|\,|g(x)|dx.$$
Il suffit donc de démontrer
$$\int_a^b |f(x)|\,|g(x)|dx \leq \Big( \int_a^b |f(x)|^2 dx \Big)^{1/2} \Big( \int_a^b |g(x)|^2 dx \Big)^{1/2}.$$
C'est-à-dire que l'on peut supposer que $f$ et $g$ sont à valeurs positives ou nulles. On note alors, pour des fonctions $h$ et $k$ intégrables, à valeurs réelles quelconques,
$$B(h, k) := \int_a^b h(x)k(x)dx.$$
Pour tout nombre $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + g$ est intégrable et
$$B(\lambda f + g, \lambda f + g) = \int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2 dx \geq 0.$$
Comme
$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2 dx &= \int_a^b \big(\lambda^2 f(x)^2 + 2\lambda f(x)g(x) + g(x)^2\big)dx \\ &= \lambda^2 \int_a^b f(x)^2 dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g(x)^2 dx \\ &= \lambda^2 B(f, f) + 2\lambda B(f, g) + B(g, g),\end{aligned}$$

le trinôme

$$\lambda^2 B(f,f) + 2\lambda B(f,g) + B(g,g)$$

est toujours $\geq 0$, donc le discriminant réduit

$$\delta := B(f,g)^2 - B(f,f)B(g,g)$$

est $\leq 0$, c'est-à-dire

$$\Big(\int_a^b f(x)g(x)dx\Big)^2 = B(f,g)^2 \leq B(f,f)B(g,g) = \int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx.$$

D'où le résultat. □

**Théorème 1.9** (Inégalité de Minkowski)**.** *Si $f$ et $g$ sont deux fonctions intégrables sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes, alors*

$$\Big(\int_a^b |f(x)+g(x)|^2 dx\Big)^{1/2} \leq \Big(\int_a^b |f(x)|^2 dx\Big)^{1/2} + \Big(\int_a^b |g(x)|^2 dx\Big)^{1/2}.$$

Démonstration. Comme

$$\forall x \in [a,b] \quad |f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|,$$

on peut supposer que $f$ et $g$ sont à valeurs positives ou nulles. On note pour des fonctions $h$ et $k$ intégrables, à valeurs réelles, quelconques,

$$B(h,k) := \int_a^b h(x)k(x)dx.$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx &= \int_a^b \big(f(x)^2 + 2f(x)g(x) + g(x)^2\big)dx \\
&= \int_a^b f(x)^2 dx + 2\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g(x)^2 dx \\
&= B(f,f) + 2B(f,g) + B(g,g) \\
&\leq B(f,f) + 2\sqrt{B(f,f)}\sqrt{B(g,g)} + B(g,g),
\end{aligned}$$

d'après le théorème 1.8 : on en déduit

$$\int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx \leq \Big(\sqrt{B(f,f)} + \sqrt{B(g,g)}\Big)^2,$$

qui donne le résultat. □

**Proposition 1.23.** *Soit $f$ une fonction intégrable sur un intervalle $[a,b]$, (à valeurs réelles ou complexes), et soit $r \in \mathbb{R}$. La fonction $\tau_r f$ définie par*

$$\forall x \in [a+r, b+r] \quad \tau_r f(x) := f(x-r)$$

*est intégrable sur l'intervalle $[a+r, b+r]$ et*

$$\int_{a+r}^{b+r} \tau_r f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Démonstration. • Si $g$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$, on définit une fonction $\tau_r g$ sur $[a+r, b+r]$ par

$$\forall x \in [a+r, b+r] \quad \tau_r g(x) := g(x-r).$$

Soit $\sigma := \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ une subdivision adaptée à $g$. Cette fonction est constante sur chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$, donc $\tau_r g$ est constante sur chacun des intervalles $]x_{i-1}+r, x_i+r[$. Par conséquent $\tau_r g$ est une fonction en escalier et $\tau_r \sigma := \{x_0+r, x_1+r, \ldots, x_{n-1}+r, x_n+r\}$ est une subdivision adaptée. De plus

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_r g_{]x_{i-1}+r, x_i+r[}((x_i+r)-(x_{i-1}+r)) = \sum_{i=1}^{n} f_{]x_{i-1}, x_i[}(x_i - x_{i-1}),$$

donc

$$\int_{a+r}^{b+r} \tau_r g(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

• Soient $(\varphi_n)_n$ et $(\theta_n)_n$ deux suites de fonctions en escalier associées à la fonction $f$. On définit pour chaque $n$ des fonctions en escalier $\tau_r \varphi_n$ et $\tau_r \theta_n$ comme précédemment. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a, b] \quad |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \theta_n(x),$$

donc pour tout $n$ et tout $x \in [a+r, b+r]$

$$|\tau_r f(x) - \tau_r \varphi_n(x)| = |f(x-r) - \varphi_n(x-r)| \leq \theta_n(x-r) = \tau_r \theta_n(x).$$

On a

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \theta_n(x)dx = 0,$$

Comme

$$\int_{a+r}^{b+r} \tau_r \theta_n(x)dx = \int_a^b \theta_n(x)dx,$$

on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a+r}^{b+r} \tau_r \theta_n(x)dx = 0.$$

Par conséquent $(\tau_r \varphi_n)_n$ et $(\tau_r \theta_n)_n$ sont deux suites de fonctions en escalier associées à la fonction $\tau_r f$. Donc celle-ci est intégrable ; de plus

$$\int_{a+r}^{b+r} \tau_r f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{a+r}^{b+r} \tau_r \varphi_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

**Corollaire.** *Soit $f$ une fonction périodique, de période $T$, à valeurs réelles ou complexes.*

(1) *Si elle est intégrable sur un intervalle $[a, b]$, elle est intégrable sur tout intervalle $[a+nT, b+nT]$, pour $n \in \mathbb{Z}$, et*

$$\int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

(2) *Si elle est intégrable sur un intervalle $[a, a+T]$, elle est intégrable sur tout intervalle $[b, b+T]$, pour $b \in \mathbb{R}$, et*

$$\int_b^{b+T} f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx.$$

Démonstration. (1) Avec les notations de la proposition, $\tau_T f = f$, et par récurrence sur $n \in \mathbb{Z}$, $\tau_{nT} f = f$. Donc, si $f$ est intégrable sur $[a, b]$, $\tau_{nT} f = f$ est intégrable sur $[a + nT, b + nT]$ et

$$\int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx = \int_{a+nT}^{b+nT} \tau_{nT} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

(2) Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$a + nT \leq b < a + (n + 1)T.$$

alors $b - nT \in [a, a + T]$. Comme $f$ est intégrable sur $[a, a + T]$, $f$ est intégrable sur $[a, b - nT]$ et sur $[b - nT, a + T]$ et l'on a

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^{b-nT} f(x)dx + \int_{b-nT}^{a+T} f(x)dx.$$

Comme $f$ est intégrable sur $[a, b - nT]$, $f$ est intégrable sur $[a + (n + 1)T, b + T]$ et

$$\int_{a+(n+1)T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^{b-nT} f(x)dx.$$

Comme $f$ est intégrable sur $[b - nT, a + T]$, $f$ est intégrable sur $[b, a + (n + 1)T]$ et

$$\int_b^{a+(n+1)T} f(x)dx = \int_{b-nT}^{a+T} f(x)dx.$$

Alors $f$ est intégrable sur $[b, a + (n + 1)T]$ et sur $[a + (n + 1)T, b + T]$ : donc $f$ est intégrable sur $[b, b + T]$ et

$$\begin{aligned}\int_b^{b+T} f(x)dx &= \int_b^{a+(n+1)T} f(x)dx + \int_{a+(n+1)T}^{b+T} f(x)dx \\ &= \int_{b-nT}^{a+T} f(x)dx + \int_a^{b-nT} f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx,\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

**Proposition 1.24.** *Soit $f$ une fonction intégrable sur un intervalle $[a, b]$, à valeurs réelles ou complexes. La fonction $\check{f}$ définie par*

$$\forall x \in [-b, -a] \quad \check{f}(x) := f(-x)$$

*est intégrable sur l'intervalle $[-b, -a]$ et*

$$\int_{-b}^{-a} \check{f}(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Démonstration. • Si $g$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$, on définit une fonction $\check{g}$ sur $[-b, -a]$ par

$$\forall x \in [-b, -a] \quad \check{g}(x) := g(-x).$$

Soit

$$\sigma := \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

une subdivision adaptée à $g$. Cette fonction est constante sur chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$, donc $\check{f}$ est constante sur chacun des intervalles $] - x_i, -x_{i-1}[$.

Par conséquent $\check{f}$ est une fonction en escalier sur l'intervalle $[-b,-a]$ et $\check{\sigma} := \{-x_n, -x_{n-1}, \dots, -x_1, -x_0\}$ est une subdivision adaptée. De plus

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \check{f}_{]-x_{n-i+1},-x_{n-i}[}((-x_{n-i}) - (-x_{n-i+1})) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n} f_{]x_{n-i},x_{n-i+1}[}(x_{n-i+1} - x_{n-i}) \\
&\quad = \sum_{j=1}^{n} f_{]x_{j-1},x_j[}(x_j - x_{j-1})
\end{aligned}$$

donc

$$\int_{-b}^{-a} \check{f}(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

• Soient $(\varphi_n)_n$ et $(\theta_n)_n$ deux suites de fonctions en escalier associées à la fonction $f$ On définit pour chaque $n$ des fonctions en escalier $\check{\varphi}_n$ et $\check{\theta}_n$ comme précédemment. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a,b] \quad |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \theta_n(x),$$

donc pour tout $n$ et tout $x \in [-b,-a]$

$$|\check{f}(x) - \check{\varphi}_n(x)| = |f(-x) - \varphi_n(-x)| \leq \theta_n(-x) = \check{\theta}_n(x).$$

On a

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \theta_n(x)dx = 0,$$

Comme

$$\int_{-b}^{-a} \check{\theta}_n(x)dx = \int_a^b \theta_n(x)dx,$$

on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-b}^{-a} \check{\theta}_n(x)dx = 0.$$

Par conséquent $(\check{\varphi}_n)_n$ et $(\check{\theta}_n)_n$ sont deux suites de fonctions en escalier associées à la fonction $\check{f}$. Donc celle-ci est intégrable ; de plus

$$\int_{-b}^{-a} \check{f}(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-b}^{-a} \check{\varphi}_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

**Corollaire.** *(1) Soit $f$ une fonction intégrable sur un intervalle $[-a,a]$ : alors*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a (f(x) + f(-x))dx = \int_{-a}^{0} (f(x) + f(-x))dx.$$

*(2) Soit $f$ une fonction intégrable sur un intervalle $[0,a]$ ou $[-a,0]$, paire : alors elle est intégrable sur l'intervalle $[-a,a]$ et*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx = 2\int_{-a}^{0} f(x)dx.$$

*(3) Soit $f$ une fonction intégrable sur un intervalle $[0,a]$ ou $[-a,0]$, impaire : alors elle est intégrable sur l'intervalle $[-a,a]$ et*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

DÉMONSTRATION. (1) La fonction $f$ est intégrable sur les intervalles $[-a,0]$ et $[0,a]$. Comme $f$ est intégrable sur $[-a,0]$, la fonction $\check{f}$ est intégrable sur $[0,a]$ et

$$\int_0^a f(-x)dx = \int_0^a \check{f}(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx.$$

De même, comme $f$ est intégrable sur $[0,a]$, la fonction $\check{f}$ est intégrable sur $[-a,0]$ et

$$\int_{-a}^0 f(-x)dx = \int_{-a}^0 \check{f}(x)dx = \int_0^a f(x)dx.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)dx &= \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\ &= \int_0^a f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a (f(x)+f(-x))dx \\ &= \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_{-a}^0 f(-x)dx = \int_{-a}^0 (f(x)+f(-x))dx,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

(2) Si $f$ est paire, intégrable sur $[0,a]$, alors $\check{f} = f$ est intégrable sur $[-a,0]$, donc $f$ est intégrable sur $[-a,a]$. De même, si $f$ est paire, intégrable sur $[-a,0]$. Ensuite, l'égalité résulte du (1).

(3) Si $f$ est impaire, intégrable sur $[0,a]$, alors $\check{f} = -f$ est intégrable sur $[-a,0]$, donc $f$ est intégrable sur $[-a,a]$. De même, si $f$ est impaire, intégrable sur $[-a,0]$. Ensuite, l'égalité résulte du (1). □

**Définition 1.12.** Soit $[a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

(1) On appelle *subdivision pointée* de $[a,b]$ un couple d'ensembles finis $\sigma$ et $\pi$ de points :

$$\sigma := \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\} \quad \text{et} \quad \pi := \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n\}$$

avec

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \quad \text{et} \quad \forall i\ (1 \leq i \leq n) \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Le *pas de la subdivision pointée* est

$$h := \max_{1\leq i\leq n} (x_i - x_{i-1}).$$

(2) Si $f$ est une fonction définie sur $[a,b]$ et $(\sigma,\pi)$ est une subdivision pointée de $[a,b]$, on appelle somme de Riemann la quantité

$$S_{\sigma,\pi} f := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i).$$

**Théorème 1.10.** *Soit $f$ une fonction intégrable sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta$ tel que, pour tout subdivision pointée $(\sigma, \pi)$ de $[a, b]$, de pas $\leq \eta$,*

$$\Big|S_{\sigma,\pi} f - \int_a^b f(x)dx\Big| < \varepsilon.$$

Démonstration. On note

$$M := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Soit $\varepsilon > 0$ : il existe $\varphi$ et $\theta$ deux fonctions en escalier telles que

$$\forall x \in [a, b] \quad |f(x) - \varphi(x)| \leq \theta(x) \quad \text{et} \quad \int_a^b \theta(x)dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Soit $\tau := \{y_0, y_1, \dots, y_p\}$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à $\varphi$ et $\theta$. Soit

$$\eta := \frac{\varepsilon}{8Mp}.$$

Soit $(\sigma, \pi)$ une subdivision pointée de $[a, b]$, de pas $\leq \eta$, où

$$\sigma := \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\} \quad \text{et} \quad \pi := \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n\}$$

On a

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\xi_i) - \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(\xi_i) - f(x))dx.$$

Notons

$$I := \{i \in \{1, \dots, n\} : \tau \cap [x_{i-1}, x_i] = \emptyset\} \quad \text{et} \quad I^c := \{1, \dots, n\} \setminus I.$$

On remarque que $I^c$ a au plus $2p$ éléments.

• Si $i \in I$, on note $\varphi_{[x_{i-1},x_i]}$ la valeur de $\varphi$ sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ et $\theta_{[x_{i-1},x_i]}$ la valeur de $\theta$ sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$. On a, pour tout $x \in [x_{i-1}, x_i]$,

$$|f(\xi_i) - f(x)| \leq |f(\xi_i) - \varphi_{[x_{i-1},x_i]}| + |\varphi_{[x_{i-1},x_i]} - f(x)| \leq 2\theta_{[x_{i-1},x_i]}.$$

Donc

$$\Big|\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(\xi_i) - f(x))dx\Big| \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(\xi_i) - f(x)|dx \leq 2\int_{x_{i-1}}^{x_i}\theta_{[x_{i-1},x_i]}dx.$$

• Si $i \in I^c$. On a, pour tout $x \in [x_{i-1}, x_i]$,

$$|f(\xi_i) - f(x)| \leq 2M.$$

Donc

$$\Big|\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(\xi_i) - f(x))dx\Big| \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(\xi_i) - f(x)|dx \leq 2M(x_i - x_{i-1}).$$

Finalement, cela donne

$$\begin{aligned}\Big|S_{\sigma,\pi}f - \int_a^b f(x)dx\Big| &= \Big|\sum_{i\in I}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(\xi_i)-f(x))dx + \sum_{i\in I^c}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(\xi_i)-f(x))dx\Big| \\ &\le \sum_{i\in I}\Big|\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(\xi_i)-f(x))dx\Big| + \sum_{i\in I^c}\Big|\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(\xi_i)-f(x))dx\Big| \\ &\le 2\sum_{i\in I}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\theta_{[x_{i-1},x_i]}dx + 4Mp\max_{1\le i\le n}(x_i-x_{i-1}) \\ &\le 2\int_a^b \theta(x)dx + 4Mp\eta < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

**Corollaire.** *Soit une formule de quadrature sur l'intervalle* $[-1,1]$

$$\int_{-1}^1 \varphi(t)dt \approx \sum_{j=0}^p \widehat{\omega}_j\varphi(t_j),$$

*exacte pour les polynômes de* $\mathbb{P}_0$*. Soient* $[a,b]$ *un intervalle borné et* $f(x)$ *une fonction définie sur* $[a,b]$*, intégrable au sens de Riemann. Pour* $k\ge 1$ *soit*

$$a = a_0^k < a_1^k < \cdots < a_{n_k}^k = b$$

*un maillage de* $[a,b]$ *et soit*

$$h_k := \max_{1\le i<\le n_k}(a_i^k - a_{i-1}^k).$$

*On note*

$$\xi_{i,j}^k := \frac{1-t_j}{2}a_{i-1}^k + \frac{1+t_j}{2}a_i^k,\quad \omega_{i,j}^k := \frac{a_i^k - a_{i-1}^k}{2}\widehat{\omega}_j,\quad 1\le i\le n_k,\ 0\le j\le p.$$

*Si* $\lim_{k\to\infty} h_k = 0$*, alors*

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=0}^p \omega_{i,j}^k f(\xi_{i,j}^k) = \int_a^b f(x)dx.$$

Démonstration. Comme la formule de quadrature est exacte pour les polynômes de $\mathbb{P}_0$, on a

$$\sum_{j=0}^p \widehat{\omega}_j = 2,$$

donc

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=0}^p \omega_{i,j}^k f(\xi_{i,j}^k) \\ &\qquad = \sum_{j=0}^p \frac{\widehat{\omega}_j}{2}\left(\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n_k}(a_i^k - a_{i-1}^k)f(\xi_{i,j}^k)\right) \underset{k\to\infty}{\rightarrow} 0,\end{aligned}$$

car $\xi_{i,j}^k \in [a_{i-1}^k, a_i^k]$. □

**Exemple 1.7.** Soit $f$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur un intervalle $[a, b]$. À $n \in \mathbb{N}^*$, on associe des points

$$x_i := a + i\frac{b-a}{n}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\Big(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\Big)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\Big(\frac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2}f(b)\Big) = \int_a^b f(x)dx.$$

CHAPITRE 2

# Primitives et intégrales

Le calcul d'une intégrale est d'abord relié à une opération inverse de celle de la dérivation. Les techniques de changement de variable et d'intégration par parties sont les outils principaux pour calculer des intégrales.

## 1. Primitives

**Notation.** On note, pour $a < b$ et $f$ intégrable sur $[a, b]$,

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx.$$

Et, si $a \in \mathbb{R}$ et $f$ est quelconque,

$$\int_a^a f(x)dx := 0.$$

Alors, si $a, b, c \in \mathbb{R}$ et si $f$ est intégrable sur $[\min(a, b, c), \max(a, b, c)]$, on a la *relation de Chasles* :

$$\int_a^c f(x)dx := \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

**Proposition 2.1.** *Soit $f$ une fonction intégrable sur un intervalle $[a, b]$ (à valeurs réelles ou complexes).*

(1) *La fonction $F$ définie sur $[a, b]$ par*

$$\forall x \in [a, b] \quad F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

*est lipschitzienne, donc uniformément continue.*

(2) *Si $f$ a une limite à gauche en $x_0$, alors $F$ est dérivable à gauche en $x_0$ et*

$$F_g'(x_0) = \lim_{x \to x_0, x < x_0} f(x).$$

(3) *Si $f$ a une limite à droite en $x_0$, alors $F$ est dérivable à droite en $x_0$ et*

$$F_d'(x_0) = \lim_{x \to x_0, x > x_0} f(x).$$

Démonstration. (1) La fonction $f$, intégrable sur $[a, b]$, est bornée : il existe $K \geq 0$ tel que

$$\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leq K.$$

Alors, si $x < y$ appartiennent à $[a, b]$,

$$F(y) - F(x) = \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^y f(t)dt.$$

Donc
$$|F(y)-F(x)| \leq \int_x^y |f(t)|dt \leq K(y-x).$$
La fonction $F$ est donc lipschitzienne, donc uniformément continue.

(2) Notons $f(x_0-0) := \lim_{x\to x_0, x<x_0} f(x)$. Soit $\varepsilon > 0$ : il existe $\eta > 0$, que l'on peut choisir $\leq x_0 - a$, tel que
$$\forall x \in [x_0-\eta, x_0[ \quad |f(x)-f(x_0-0)| < \varepsilon.$$
Par conséquent, pour tout $x \in [x_0-\eta, x_0]$,
$$\Big|\int_x^{x_0} (f(t)-f(x_0-0))dt\Big| \leq \int_x^{x_0} |f(t)-f(x_0-0)|dt \leq (x_0-x)\varepsilon$$
(on remplace la valeur de $f$ en $x_0$ par $f(x_0-0)$). Soit
$$|F(x_0)-F(x)-(x_0-x)f(x_0-0)| \leq (x_0-x)\varepsilon,$$
par conséquent
$$\forall x \in [x_0-\eta, x_0[ \quad \Big|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0-0)\Big| \leq \varepsilon.$$
Comme $\varepsilon$ est quelconque, cela prouve le résultat

(3) La démonstration est analogue. □

**Corollaire.** *Soit $f$ une fonction intégrable sur un intervalle $[a,b]$ (à valeurs réelles ou complexes). La fonction $F$ définie sur $[a,b]$ par*
$$\forall x \in [a,b] \quad F(x) := \int_a^x f(t)dt$$
*est dérivable, de dérivée égale à $f$ en tout point où cette fonction $f$ est continue.*

**Définition 2.1.** On appelle *primitive d'une fonction $f$ dans un intervalle $I \subset$* $\mathbb{R}$ toute fonction $F$ vérifiant
$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x).$$

**Remarque 2.1.** Soient $F$ et $G$ deux primitives de $f$ sur un intervalle $I$, D'après le théorème des accroissements finis, leur différence est une constante sur tout intervalle fermé contenu dans $I$, donc elle est constante sur $I$.

**Théorème 2.1.** *Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes.*

(1) *La fonction $F$ définie sur $[a,b]$ par*
$$\forall x \in [a,b] \quad F(x) := \int_a^x f(t)dt$$
*est une primitive de $f$.*

(2) *Si $\widetilde{F}$ est une primitive de $f$,*
$$\int_a^b f(t)dt = \widetilde{F}(b) - \widetilde{F}(a).$$

**Corollaire 1.** *Toute fonction continue définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ a une primitive.*

DÉMONSTRATION. Si $I$ est un intervallle fermé borné $[a,b]$, cela résulte du théorème. Dans le cas général, soit $c \in I$, la fonction définie sur $I$ par

$$\forall x \in I \quad F(x) := \int_c^x f(t)dt$$

est une primitive de $f$ sur tout intervalle fermé borné contenant $c$ et contenu dans $I$, donc est une primitive de $f$ sur $I$. □

**Corollaire 2.** *Soit $\psi$ une fonction dérivable d'un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un intervalle $[c,d]$ de $\mathbb{R}$ ; soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[c,d]$, à valeurs réelles ou complexes. La fonction*

$$x \to \int_c^{\psi(x)} f(t)dt$$

*est dérivable sur $[a,b]$ et*

$$\frac{d}{dx}\Big(\int_c^{\psi(x)} f(t)dt\Big) = f \circ \psi(x)\psi'(x).$$

DÉMONSTRATION. On note, pour $y \in [c,d]$ :

$$F(y) := \int_c^y f(t)dt.$$

La fonction $F$ est dérivable de dérivée $f$ ; on a

$$\forall x \in [a,b] \quad \int_c^{\psi(x)} f(t)dt = F \circ \psi(x).$$

D'où le résultat. □

**Corollaire 3.** *Soient $\phi, \psi$ deux fonctions dérivables d'un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un intervalle $[c,d]$ de $\mathbb{R}$ ; soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[c,d]$, à valeurs réelles ou complexes. La fonction*

$$x \to \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt$$

*est dérivable sur $[a,b]$ et*

$$\frac{d}{dx}\Big(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt\Big) = f \circ \psi(x)\psi'(x) - f \circ \phi(x)\phi'(x).$$

DÉMONSTRATION. On écrit, pour $x \in [a,b]$ :

$$\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = \int_c^{\psi(x)} f(t)dt - \int_c^{\phi(x)} f(t)dt$$

et on utilise le résultat précédent. □

**Remarque 2.2.** Si $f$ est une fonction définie sur un intervalle $I$, on note

$$\int f(x)dx$$

toute primitive de $f$.

Si $F$ est une fonction définie sur un intervalle $I$, et si $a, b \in I$, on note

$$[F(x)]_a^b := F(b) - F(a).$$

**Exemple 2.1.** On a les primitives suivantes ($C$ désigne une constante quelconque).

(1) Si $p \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C}$, on a dans tout intervalle de $\mathbb{R}$,
$$\int (x-a)^p dx = \frac{1}{p+1}(x-a)^{p+1} + C.$$
(2) Si $p \in \mathbb{Z}_- \setminus \{-1\}$ et $a \in \mathbb{C}$, on a dans tout intervalle ne contenant pas $a$,
$$\int (x-a)^p dx = \frac{1}{p+1}(x-a)^{p+1} + C.$$
(3) Si $a \in \mathbb{R}$, on a dans tout intervalle ne contenant pas $a$,
$$\int \frac{1}{x-a} dx = \operatorname{Ln}|x-a| + C.$$
(4) Si $a \in \mathbb{R}^*$, on a dans tout intervalle de $\mathbb{R}$,
$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\operatorname{Arc\,tg}\frac{x}{a} + C.$$
(5) Si $a = \alpha + \imath\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on a dans tout intervalle de $\mathbb{R}$,
$$\int \frac{1}{x-a} dx = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right) + \imath \operatorname{Arc\,tg}\frac{x-\alpha}{\beta} + C.$$
En effet, on écrit, si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$
$$\frac{1}{x-a} = \frac{x-\alpha+\imath\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$
donc
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x-a} dx &= \int \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2} dx + \imath\beta \int \frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2} dx \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right) + \imath \operatorname{Arc\,tg}\frac{x-\alpha}{\beta} + C.\end{aligned}$$
(6) Si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et $(b, c) \in \mathbb{R}^2$, on a dans tout intervalle de $\mathbb{R}$,
$$\int \frac{bx+c}{(x-\alpha)^2+\beta^2} dx = \frac{b}{2}\operatorname{Ln}\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right) + \frac{\alpha b+c}{\beta}\operatorname{Arc\,tg}\frac{x-\alpha}{\beta} + C.$$
En effet, on écrit,
$$\frac{bx+c}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = b\frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{\alpha b+c}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$
donc
$$\begin{aligned}\int \frac{bx+c}{(x-\alpha)^2+\beta^2} dx &= b\int \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2} dx + (\alpha b+c)\int \frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2} dx \\ &= \frac{b}{2}\operatorname{Ln}\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right) + \frac{\alpha b+c}{\beta}\operatorname{Arc\,tg}\frac{x-\alpha}{\beta} + C.\end{aligned}$$

**Proposition 2.2.** *Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ $(n \geq 1)$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs complexes, telle que*
$$\forall x \in I \quad |f(x)| = 1.$$
*Il existe alors une fonction $\theta$ de classe $\mathcal{C}^n$ définie sur $I$, à valeurs réelles, telle que*
$$\forall x \in I \quad f(x) = e^{\imath\theta(x)}.$$

Démonstration. La fonction $\theta$ vérifie nécessairement, pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = \imath\theta'(x)\mathrm{e}^{\imath\theta(x)} = \imath\theta'(x)f(x),$$

donc

$$\theta'(x) = -\imath\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Soit $x_0 \in I$ et $\theta_0$ tel que $f(x_0) = \mathrm{e}^{\imath\theta_0}$. Soit $\theta$ la primitive de $-\imath f'/f$ qui vaut $\theta_0$ en $x_0$. La fonction $\theta$ est dérivable, de dérivée de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $I$, donc elle est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$. Soit, pour $x \in I$,

$$g(x) := f(x)\mathrm{e}^{-\imath\theta(x)}$$

On a

$$g(x_0) = f(x_0)\mathrm{e}^{-\imath\theta(x_0)} = f(x_0)\mathrm{e}^{-\imath\theta_0} = 1$$

et

$$\forall x \in I \quad g'(x) = (f'(x) - \imath f(x)\theta'(x))\mathrm{e}^{-\imath\theta(x)} = 0,$$

donc $g = 1$ et par conséquent

$$\forall x \in I \quad f(x) = \mathrm{e}^{\imath\theta(x)}.$$

Par ailleurs

$$1 = |f(x)| = \mathrm{e}^{-\operatorname{Im}\theta(x)},$$

donc $\theta$ est à valeurs réelles. □

**Théorème 2.2** (Changement de variable)**.** *Soit $\phi$ une fonction continûment dérivable d'un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un intervalle $[c, d]$ de $\mathbb{R}$ ; soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[c, d]$, à valeurs réelles ou complexes. On a*

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y)dy = \int_a^b f \circ \phi(x)\phi'(x)dx.$$

Démonstration. On note, pour $x \in [a, b]$ :

$$\widetilde{F}(x) := \int_{\phi(a)}^{\phi(x)} f(u)du \quad \text{et} \quad G(x) := \int_a^x f \circ \phi(t)\phi'(t)dt.$$

D'après le résultat du corollaire 2 du théorème 2.1, $\widetilde{F}$ est dérivable, et

$$\forall x \in [a, b] \quad \widetilde{F}'(x) = f \circ \phi(x)\phi'(x).$$

Comme $f \circ \phi$ et $\phi'$ sont continues sur $[a, b]$,

$$\forall x \in [a, b] \quad G'(x) = f \circ \phi(x)\phi'(x).$$

Par conséquent $\widetilde{F} - G$ est constante sur $[a, b]$ ; comme $\widetilde{F}(a) = G(a) = 0$, on a le résultat annoncé. □

**Remarque 2.3.** Sous les hypothèses du théorème, en notant

$$\forall y \in [c, d] \quad F(y) := \int_{\phi(a)}^{y} f(u)du,$$

on a $\widetilde{F} = F \circ \phi$ ; une primitive de $(f \circ \phi)\phi'$ est $G = \widetilde{F}$ donc

$$\int f \circ \phi(x)\phi'(x)dx = F \circ \phi + C,$$

où $F$ est une primitive de $f$ et $C$ est une constante quelconque.

**Exemple 2.2.** (1) Pour $0 < a < 1$, soit

$$I_a := \int_a^{1/a} \frac{\operatorname{Ln} x}{1+x^2} dx.$$

On a

$$I_a = \int_a^1 \frac{\operatorname{Ln} x}{1+x^2} dx + \int_1^{1/a} \frac{\operatorname{Ln} x}{1+x^2} dx.$$

Soit

$$\phi : t \in [a, 1] \to \frac{1}{t}.$$

Alors

$$\int_1^{1/a} \frac{\operatorname{Ln} x}{1+x^2} dx = \int_{\phi(1)}^{\phi(a)} \frac{\operatorname{Ln} x}{1+x^2} dx = -\int_{\phi(a)}^{\phi(1)} \frac{\operatorname{Ln} x}{1+x^2} dx = \int_a^1 \frac{\operatorname{Ln}(1/t)}{1+(1/t)^2} \frac{1}{t^2} dt$$
$$= -\int_a^1 \frac{\operatorname{Ln} t}{1+t^2} dt,$$

donc $I_a = 0$.

(2) Calcul de

$$\int \frac{1}{x \operatorname{Ln} x} dx$$

Soit

$$\phi : x \in ]0, +\infty[ \to \operatorname{Ln} x,$$

Alors

$$\int \frac{1}{x \operatorname{Ln} x} dx = \int \frac{1}{\phi(x)} \phi'(x) dx = \operatorname{Ln} |\phi(x)| + C = \operatorname{Ln} |\operatorname{Ln} x| + C,$$

dans tout intervalle inclus dans $]0, +\infty[$ où $\operatorname{Ln} x$ ne s'annule pas, c'est-à-dire dans tout intervalle inclus dans $]0, 1[$ ou dans $]1, +\infty[$ ($C$ désigne une constante quelconque).

**Théorème 2.3** (Intégration par parties)**.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions continûment dérivables sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. On a*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Démonstration. On remarque que $fg$ est une primitive de $fg' + f'g$. □

**Remarque 2.4.** Sous les hypothèses du théorème,

$$\int f(x)g'(x)dx = fg - \int f'(x)g(x)dx + C,$$

où $C$ est une constante quelconque.

**Exemple 2.3.** (1) Pour $n \in \mathbb{Z}^*$, soit

$$I_n := \int_0^{\pi} x \cos nx dx.$$

On a

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n}[x \sin nx]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx dx = \frac{1}{n^2}[\cos nx]_0^\pi = \frac{1}{n^2}((-1)^n - 1) \\ &= \begin{cases} -\dfrac{2}{n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \end{aligned}$$

(2) On a

$$\int \operatorname{Arc\,tg} x dx = x \operatorname{Arc\,tg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \operatorname{Arc\,tg} x - \frac{1}{2}\operatorname{Ln}(1+x^2) + C,$$

où $C$ est une constante quelconque.
(3) Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et $(b, c) \in \mathbb{R}^2$. On veut calculer, pour $p \in \mathbb{N}$, avec $p \geq 2$

$$\int \frac{bx+c}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^p} dx.$$

Les primitives sont calculées dans $\mathbb{R}$. On écrit,

$$\frac{bx+c}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^p} = b\frac{x-\alpha}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^p} + \frac{\alpha b + c}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^p},$$

donc

$$\begin{aligned} \int \frac{bx+c}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^p} dx = b \int & \frac{x-\alpha}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^p} dx \\ & + (\alpha b + c) \int \frac{1}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^p} dx. \end{aligned}$$

• Pour calculer la première intégrale, on fait le changement de variable

$$x \to y := (x-\alpha)^2 + \beta^2.$$

Alors

$$\begin{aligned} b \int \frac{x-\alpha}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^p} dx &= \frac{b}{2}\int \frac{1}{y^p} dy = -\frac{b}{2(p-1)}\frac{1}{y^{p-1}} + C \\ &= -\frac{b}{2(p-1)}\frac{1}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{p-1}} + C, \end{aligned}$$

où $C$ est une constante quelconque.
• Pour calculer la seconde intégrale, on fait le changement de variable

$$x \to y := \frac{1}{\beta}(x-\alpha).$$

Alors

$$(\alpha b + c) \int \frac{1}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^p} dx = \frac{\alpha b + c}{\beta^{2p-1}} \int \frac{1}{(y^2+1)^p} dy.$$

On note, pour $p \geq 1$ :

$$J_p := \int \frac{1}{(y^2+1)^p} dy.$$

On a

$$J_1 = \operatorname{Arc\,tg} y + C,$$

où $C$ est une constante quelconque. En général

$$\begin{aligned}
J_p &= \frac{y}{(y^2+1)^p} + 2p\int \frac{y^2}{(y^2+1)^{p+1}}dy = \frac{y}{(y^2+1)^p} + 2p\int \frac{y^2+1-1}{(y^2+1)^{p+1}}dy \\
&= \frac{y}{(y^2+1)^p} + 2p\int \frac{1}{(y^2+1)^p}dy - 2p\int \frac{1}{(y^2+1)^{p+1}}dy \\
&= \frac{y}{(y^2+1)^p} + 2p\big(J_p - J_{p+1}\big).
\end{aligned}$$

Donc

$$J_{p+1} = \frac{2p-1}{2p}J_p + \frac{1}{2p}\frac{y}{(y^2+1)^p},$$

ce qui permet de calculer $J_p$ de proche en proche.

**Corollaire.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. On a*

$$\int_a^b f(x)g^{(n)}(x)dx = [f(x)g^{(n-1)}(x)]_a^b - [f'(x)g^{(n-2)}(x)]_a^b + \cdots \\
+ (-1)^{n-1}[f^{(n-1)}(x)g(x)]_a^b + (-1)^n\int_a^b f^{(n)}(x)g(x)dx.$$

Démonstration. On démontre par récurrence sur $m$, avec $1 \leq m \leq n$ :

$$\int_a^b f(x)g^{(n)}(x)dx = [f(x)g^{(n-1)}(x)]_a^b - [f'(x)g^{(n-2)}(x)]_a^b + \cdots \\
+ (-1)^{m-1}[f^{(m-1)}(x)g^{(n-m)}(x)]_a^b + (-1)^m\int_a^b f^{(m)}(x)g^{(n-m)}(x)dx.$$

• Pour $m = 1$, c'est :

$$\int_a^b f(x)g^{(n)}(x)dx = [f(x)g^{(n-1)}(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g^{(n-1)}(x)dx,$$

qui résulte du théorème 2.3 (intégration par parties).
• Si l'on a la formule pour $m < n$, on écrit

$$\int_a^b f^{(m)}(x)g^{(n-m)}(x)dx = [f^{(m)}(x)g^{(n-m-1)}(x)]_a^b - \int_a^b f^{(m+1)}(x)g^{(n-m-1)}(x)dx,$$

qui permet d'obtenir la formule pour $m+1$.
• La formule est donc établie pour tout $m \leq n$, en particulier pour $m = n$ : c'est le résultat demandé. □

**Théorème 2.4** (Formule de Taylor avec reste intégral)**.** *Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. On a*

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx.$$

Démonstration. On démontre par récurrence sur $m$, avec $0 \leq m \leq n$ :

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{m} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \frac{1}{m!}\int_a^b f^{(m+1)}(x)(b-x)^m dx.$$

• Pour $m = 0$, c'est :
$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)dx.$$
qui résulte du théorème 2.1.
• Si l'on a la formule pour $m < n$, on écrit
$$\begin{aligned}
&\int_a^b f^{(m+1)}(x)(b-x)^m dx \\
&\quad = -\frac{1}{m+1}[f^{(m+1)}(x)(b-x)^{m+1}]_a^b + \frac{1}{m+1}\int_a^b f^{(m+2)}(x)(b-x)^{m+1}dx \\
&\qquad = \frac{1}{m+1} f^{(m+1)}(a)(b-a)^{m+1} + \frac{1}{m+1}\int_a^b f^{(m+2)}(x)(b-x)^{m+1}dx,
\end{aligned}$$
qui permet d'obtenir la formule pour $m+1$.
• La formule est donc établie pour tout $m \leq n$, en particulier pour $m = n$ : c'est le résultat demandé. □

**Remarque 2.5.** Sous les hypothèses du théorème, on établit de même
$$f(a) = f(b) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f^{(k)}(b)\frac{(b-a)^k}{k!} + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(x-a)^n dx.$$
c'est-à-dire
$$f(a) = f(b) + \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(b)\frac{(a-b)^k}{k!} + \frac{1}{n!}\int_b^a f^{(n+1)}(x)(a-x)^n dx.$$

**Remarque 2.6.** Sous les hypothèses du théorème, on a
$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(a+(b-a)t)(1-t)^n dt,$$
en faisant le changement de variable : $x = a + (b-a)t$.

On a également
$$f(a) = f(b) + \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(b)\frac{(a-b)^k}{k!} + \frac{(a-b)^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(b+(a-b)t)(1-t)^n dt.$$

**Exemple 2.4.** Soit $f$ une fonction de clase $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $[a,b]$.
• Si $[x, x+h] \subset [a,b]$, on a
$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + h^2\int_0^1 f''(x+th)(1-t)dt,$$
donc
$$\frac{1}{h}\big(f(x+h) - f(x)\big) - f'(x) = h\int_0^1 f''(x+th)(1-t)dt.$$
• De même, si $[x-h, x] \subset [a,b]$, on a
$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + h^2\int_0^1 f''(x-th)(1-t)dt,$$

donc

$$\frac{1}{h}\big(f(x)-f(x+h)\big)-f'(x)=-h\int_0^1 f''(x-th)(1-t)dt.$$

Si $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur un intervalle $[a,b]$ et si $[x-h,x+h]\subset[a,b]$, on a

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+\frac{h^3}{2}\int_0^1 f^{(3)}(x+th)(1-t)^2dt,$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2-\frac{h^3}{2}\int_0^1 f^{(3)}(x-th)(1-t)^2dt,$$

donc

$$\frac{1}{2h}\big(f(x+h)-f(x-h)\big)-f'(x)=\frac{h^2}{2}\int_0^1 \big(f^{(3)}(x+th)+f^{(3)}(x-th)\big)(1-t)^2dt.$$

## 2. Calcul d'intégrales

On donne queques méthodes permettant de calculer les primitives de combinaisons de fonctions usuelles. On se reportera au formulaire de l'annexe A pour les primitives des fonctions usuelles.

**2.1. Primitives de $P(\cos\theta,\sin\theta)$.** Ici $P$ est un polynôme de deux variables. La fonction

$$\theta\to P(\cos\theta,\sin\theta)$$

est continue. Il suffit de connaître des primitives des monômes.

• Calcul de

$$\int\cos^{2\ell}\theta\sin^{2m+1}\theta d\theta.$$

On utilise le changement de variable

$$\theta\to x:=\cos\theta$$

(avec $x'=-\sin\theta$) ; alors

$$\int\cos^{2\ell}\theta\sin^{2m+1}\theta d\theta=-\int x^{2\ell}(1-x^2)^m dx.$$

• Calcul de

$$\int\cos^{2\ell+1}\theta\sin^{2m}\theta d\theta.$$

On utilise le changement de variable

$$\theta\to y:=\sin\theta$$

(avec $y'=\cos\theta$) ; alors

$$\int\cos^{2\ell+1}\theta\sin^{2m}\theta d\theta=\int(1-y^2)^\ell y^{2m}dy.$$

• Calcul de

$$\int\cos^{2\ell+1}\theta\sin^{2m+1}\theta d\theta.$$

On utilise le changement de variable

$$\theta\to z:=\cos 2\theta$$

(avec $z' = -2\sin 2\theta = -4\sin\theta\cos\theta$) ; alors

$$\begin{aligned}\int \cos^{2\ell+1}\theta \sin^{2m+1}\theta d\theta &= -\frac{1}{4}\int \Big(\frac{1+z}{2}\Big)^{\ell}\Big(\frac{1-z}{2}\Big)^{m} dy\\ &= -\frac{1}{2^{\ell+m+2}}\int (1+z)^{\ell}(1-z)^{m} dz.\end{aligned}$$

• Calcul de

$$\int \cos^{2\ell}\theta \sin^{2m}\theta d\theta,$$

pour $\ell$ et $m$ petits. On utilise les formules

$$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2} \qquad \sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$$

et

$$\cos\varphi\cos\psi = \frac{1}{2}\big(\cos(\varphi-\psi)+\cos(\varphi+\psi)\big).$$

**Exemple 2.5.** Calcul de

$$\int \cos^4\theta \sin^2\theta d\theta.$$

On a

$$\begin{aligned}\cos^4\theta\sin^2\theta = \cos^2\theta(\cos\theta\sin\theta)^2 &= \frac{1}{4}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\sin^2 2\theta = \frac{1}{8}(1+\cos 2\theta)\frac{1-\cos 4\theta}{2}\\ &= \frac{1}{16}(1+\cos 2\theta - \cos 4\theta - \cos 2\theta\cos 4\theta)\\ &= \frac{1}{16}\Big(1+\cos 2\theta - \cos 4\theta - \frac{1}{2}(\cos 2\theta + \cos 6\theta)\Big)\\ &= \frac{1}{32}(2+\cos 2\theta - 2\cos 4\theta - \cos 6\theta)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int \cos^4\theta\sin^2\theta d\theta &= \frac{1}{32}\int (2+\cos 2\theta - 2\cos 4\theta - \cos 6\theta) d\theta\\ &= \frac{1}{16}\theta + \frac{1}{64}\sin 2\theta - \frac{1}{64}\sin 4\theta - \frac{1}{192}\sin 6\theta + C,\end{aligned}$$

où $C$ est une constante quelconque.

• Calcul de

$$\int \cos^{2\ell}\theta \sin^{2m}\theta d\theta,$$

dans le cas général : on utilise les *formules d'Euler*. On a

$$\cos^{2\ell}\theta\sin^{2m}\theta = \cos^{2\ell}\theta(1-\cos^2\theta)^m.$$

Il suffit donc de connaître les primitives des puissances (paires) de $\cos\theta$. On a

$$\cos^m\theta = \frac{1}{2^m}(\mathrm{e}^{\imath\theta}+\mathrm{e}^{-\imath\theta})^m = \frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\mathrm{e}^{\imath(m-2k)\theta}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\cos^{2\ell}\theta &= \frac{1}{2^{2\ell}}\sum_{k=0}^{2\ell}\binom{2\ell}{k}\mathrm{e}^{2\imath(\ell-k)\theta}\\
&= \frac{1}{2^{2\ell}}\left(\sum_{k=0}^{\ell-1}\binom{2\ell}{k}\left(\mathrm{e}^{2\imath(\ell-k)\theta}+\mathrm{e}^{-2\imath(\ell-k)\theta}\right)+\binom{2\ell}{\ell}\right)\\
&= \frac{1}{2^{2\ell}}\left(2\sum_{k=0}^{\ell-1}\binom{2\ell}{k}\cos 2(\ell-k)\theta+\binom{2\ell}{\ell}\right)\\
&= \frac{1}{2^{2\ell}}\left(\binom{2\ell}{\ell}+2\sum_{j=1}^{\ell}\binom{2\ell}{\ell-j}\cos 2j\theta\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\cos^{2\ell+1}\theta &= \frac{1}{2^{2\ell+1}}\sum_{k=0}^{2\ell+1}\binom{2\ell+1}{k}\mathrm{e}^{\imath(2(\ell-k)+1)\theta}\\
&= \frac{1}{2^{2\ell+1}}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{2\ell+1}{k}\left(\mathrm{e}^{\imath(2(\ell-k)+1)\theta}+\mathrm{e}^{-\imath(2(\ell-k)+1)\theta}\right)\\
&= \frac{1}{2^{2\ell}}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{2\ell+1}{k}\cos(2(\ell-k)+1)\theta\\
&= \frac{1}{2^{2\ell}}\sum_{j=0}^{\ell}\binom{2\ell+1}{\ell-j}\cos(2j+1)\theta.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\int\cos^{2\ell}\theta d\theta &= \frac{1}{2^{2\ell}}\left(\binom{2\ell}{\ell}\theta+2\sum_{j=1}^{\ell}\binom{2\ell}{\ell-j}\int\cos 2j\theta d\theta\right)\\
&= \frac{1}{2^{2\ell}}\left(\binom{2\ell}{\ell}\theta+\sum_{j=1}^{\ell}\binom{2\ell}{\ell-j}\frac{1}{j}\sin 2j\theta\right)+C
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int\cos^{2\ell+1}\theta d\theta &= \frac{1}{2^{2\ell}}\sum_{j=0}^{\ell}\binom{2\ell+1}{\ell-j}\int\cos(2j+1)\theta d\theta\\
&= \frac{1}{2^{2\ell}}\sum_{j=0}^{\ell}\binom{2\ell+1}{\ell-j}\frac{1}{2j+1}\sin(2j+1)\theta+C,
\end{aligned}$$

où $C$ est une constante quelconque.

**Exemple 2.6.** Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$. On veut calculer, pour $p\in\mathbb{N}$, avec $p\geq 2$

$$\int\frac{1}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^p}dx.$$

Les primitives sont calculées dans $\mathbb{R}$. On fait le changement de variable

$$\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to x:=\alpha+\beta\operatorname{tg}\theta.$$

Alors

$$\int \frac{1}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^p}dx = \frac{1}{\beta^{2p-1}}\int \frac{1}{(\operatorname{tg}^2\theta+1)^{p-1}}d\theta = \frac{1}{\beta^{2p-1}}\int \cos^{2p-2}\theta d\theta,$$

que l'on peut calculer avec les méthodes précédentes.

**2.2. Primitives de $R(\cos\theta, \sin\theta)$.** Ici $R$ est une fraction rationnelle de deux variables. La fonction $\rho : \theta \to R(\cos\theta, \sin\theta)$ est continue dans tout intervalle ne contenant pas ses singularités. Une méthode générale est d'utiliser le changement de variable :

$$\phi : \theta \in ]-\pi, \pi[ \to t := \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \in \mathbb{R}$$

dans un intervalle inclus dans $]-\pi, \pi[$ ne contenant pas de singularité de la fonction $\rho$. On a

$$\phi'(\theta) = \frac{1}{2}\Big(1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\Big) = \frac{1}{2}(1+t^2)$$

et

$$\cos\theta = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin\theta = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Alors

$$\int R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = \int R\Big(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\Big)\frac{2}{1+t^2}dt.$$

On peut simplifier le calcul dans certains cas. On note

$$R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

où $P$ et $Q$ sont des polynômes de deux variables.

• La fonction $\rho : \theta \to R(\cos\theta, \sin\theta)$ est impaire :

$$\forall\theta \quad \rho(-\theta) = -\rho(\theta).$$

On ordonne $Q(\cos\theta, \sin\theta)$ par rapport aux puissances de $\sin\theta$ et on sépare les puissances paires et impaires (les sommes sont finies).

$$\begin{aligned}
Q(\cos\theta, \sin\theta) &= \sum_{\ell\geq 0} q_\ell(\cos\theta)\sin^\ell\theta \\
&= \sum_{k\geq 0} q_{2k}(\cos\theta)\sin^{2k}\theta + \sum_{k\geq 0} q_{2k+1}(\cos\theta)\sin^{2k+1}\theta \\
&= \sum_{k\geq 0} q_{2k}(\cos\theta)(1-\cos^2\theta)^k + \sum_{k\geq 0} q_{2k+1}(\cos\theta)(1-\cos^2\theta)^k\sin\theta \\
&= Q_0(\cos\theta) + Q_1(\cos\theta)\sin\theta,
\end{aligned}$$

où $Q_0$ et $Q_1$ sont deux polynômes. On a donc

$$\begin{aligned}
R(\cos\theta, \sin\theta) &= \frac{P(\cos\theta, \sin\theta)}{Q_0(\cos\theta) + Q_1(\cos\theta)\sin\theta} \\
&= \frac{P(\cos\theta, \sin\theta)}{Q_0^2(\cos\theta) - Q_1^2(\cos\theta)\sin^2\theta}(Q_0(\cos\theta) - Q_1(\cos\theta)\sin\theta) \\
&= \frac{\widetilde{P}(\cos\theta, \sin\theta)}{Q_2(\cos\theta)},
\end{aligned}$$

où $\widetilde{P}$ est un polynôme de deux variables et $Q_2$ est un polynôme. En faisant le même raisonnement que pour $Q$, on décompose

$$\widetilde{P}(\cos\theta, \sin\theta) = P_0(\cos\theta) + P_1(\cos\theta)\sin\theta,$$

où $P_0$ et $P_1$ sont deux polynômes. Et comme $\widetilde{P}$ vérifie :

$$\forall\theta \quad \widetilde{P}(\cos(-\theta), \sin(-\theta)) = -\widetilde{P}(\cos\theta, \sin\theta),$$

on a $P_0 = 0$. Par conséquent

$$R(\cos\theta, \sin\theta) = \frac{P_1(\cos\theta)}{Q_2(\cos\theta)}\sin\theta.$$

En faisant le changement de variable

$$\theta \to x := \cos\theta$$

(avec $x' = -\sin\theta$), on a :

$$\int R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = -\int \frac{P_1(x)}{Q_2(x)}dx.$$

• La fonction $\rho : \theta \to R(\cos\theta, \sin\theta)$ vérifie :

$$\forall\theta \quad \rho(\pi - \theta) = -\rho(\theta).$$

On ordonne $Q(\cos\theta, \sin\theta)$ par rapport aux puissances de $\cos\theta$ et on sépare les puissances paires et impaires comme précédemment.

$$Q(\cos\theta, \sin\theta) = Q_0(\sin\theta) + Q_1(\sin\theta)\cos\theta,$$

où $Q_0$ et $Q_1$ sont deux polynômes. On a donc

$$\begin{aligned}
R(\cos\theta, \sin\theta) &= \frac{P(\cos\theta, \sin\theta)}{Q_0(\sin\theta) + Q_1(\sin\theta)\cos\theta} \\
&= \frac{P(\cos\theta, \sin\theta)}{Q_0^2(\sin\theta) - Q_1^2(\sin\theta)\cos^2\theta}(Q_0(\sin\theta) - Q_1(\sin\theta)\cos\theta) \\
&= \frac{\widetilde{P}(\cos\theta, \sin\theta)}{Q_2(\sin\theta)},
\end{aligned}$$

où $\widetilde{P}$ est un polynôme de deux variables et $Q_2$ est un polynôme. En faisant le même raisonnement que pour $Q$, on décompose

$$\widetilde{P}(\cos\theta, \sin\theta) = P_0(\sin\theta) + P_1(\sin\theta)\cos\theta,$$

où $P_0$ et $P_1$ sont deux polynômes. Et comme $\widetilde{P}$ vérifie :

$$\forall\theta \quad \widetilde{P}(\cos(\pi - \theta), \sin(\pi - \theta)) = -\widetilde{P}(\cos\theta, \sin\theta),$$

on a $P_0 = 0$. Par conséquent

$$R(\cos\theta, \sin\theta) = \frac{P_1(\sin\theta)}{Q_2(\sin\theta)}\cos\theta.$$

En faisant le changement de variable

$$\theta \to x := \sin\theta$$

(avec $x' = \cos\theta$), on a :

$$\int R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = \int \frac{P_1(x)}{Q_2(x)}dx.$$

• La fonction $\rho : \theta \to R(\cos\theta, \sin\theta)$ vérifie :

$$\forall\theta \quad \rho(\theta + \pi) = \rho(\theta).$$

On a

$$R(\cos\theta, \sin\theta) = \frac{P(\cos\theta, \sin\theta)}{Q(\cos\theta, \sin\theta)} = \frac{P(\cos\theta, \cos\theta \operatorname{tg}\theta)}{Q(\cos\theta, \cos\theta \operatorname{tg}\theta)}$$

On ordonne $Q(\cos\theta, \cos\theta \operatorname{tg}\theta)$ par rapport aux puissances de $\cos\theta$ et on sépare les puissances paires et impaires comme précédemment.

$$Q(\cos\theta, \cos\theta \operatorname{tg}\theta) = Q_0(\operatorname{tg}\theta) + Q_1(\operatorname{tg}\theta)\cos\theta,$$

où $Q_0, Q_1$ sont deux polynômes. On a donc

$$\begin{aligned} R(\cos\theta, \sin\theta) &= \frac{P(\cos\theta, \cos\theta \operatorname{tg}\theta)}{Q_0(\operatorname{tg}\theta) + Q_1(\operatorname{tg}\theta)\cos\theta} \\ &= \frac{P(\cos\theta, \cos\theta \operatorname{tg}\theta)}{Q_0^2(\operatorname{tg}\theta) - Q_1^2(\operatorname{tg}\theta)\cos^2\theta}(Q_0(\operatorname{tg}\theta) - Q_1(\operatorname{tg}\theta)\cos\theta) \\ &= \frac{\widetilde{P}(\cos\theta, \operatorname{tg}\theta)}{Q_2(\operatorname{tg}\theta)}, \end{aligned}$$

où $\widetilde{P}$ est un polynôme de deux variables et $Q_2$ est un polynôme. En faisant le même raisonnement que précédemment, on décompose

$$\widetilde{P}(\cos\theta, \operatorname{tg}\theta) = P_0(\operatorname{tg}\theta) + P_1(\operatorname{tg}\theta)\cos\theta,$$

où $P_0$ et $P_1$ sont deux polynômes. Et comme $\widetilde{P}$ vérifie :

$$\forall\theta \quad \widetilde{P}(\cos(\theta+\pi), \operatorname{tg}(\theta+\pi)) = \widetilde{P}(\cos\theta, \operatorname{tg}\theta),$$

on a $P_1 = 0$. Par conséquent

$$R(\cos\theta, \sin\theta) = \frac{P_0(\operatorname{tg}\theta)}{Q_2(\operatorname{tg}\theta)}.$$

Il existe une fraction rationnelle (d'une variable) $R_1$ telle que, en dehors des singularités,

$$R(\cos\theta, \sin\theta) = R_1(\operatorname{tg}\theta).$$

Dans un intervalle inclus dans $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ (avec $k \in \mathbb{Z}$), on utilise le changement de variable

$$\theta \to t := \operatorname{tg}\theta$$

(avec $t' = 1 + \operatorname{tg}^2\theta$) ; alors

$$\int R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = \int R_1(\operatorname{tg}\theta)d\theta = \int R_1(t)\frac{1}{1+t^2}dt.$$

• La fraction rationnelle de deux variables $R(x, y)$ est homogène de degré 0. Alors il existe une fraction rationnelle (d'une variable) $R_1$ telle que, en dehors des singularités,

$$R(\cos\theta, \sin\theta) = R_1(\operatorname{tg}\theta).$$

On peut aussi se ramener à cette situation en utilisant la relation $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

**Exemple 2.7.** Calcul de

$$\int \frac{1}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta} d\theta,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. Dans tout intervalle où

$$a\cos^2\theta + b\sin^2\theta \neq 0 \quad \text{et} \quad \cos\theta \neq 0,$$

on a

$$\frac{1}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta} = \frac{1 + \mathrm{tg}^2\theta}{a + b\mathrm{tg}^2\theta}.$$

Donc

$$\int \frac{1}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta} d\theta = \int \frac{1 + \mathrm{tg}^2\theta}{a + b\mathrm{tg}^2\theta} d\theta = \int \frac{1+t^2}{a+bt^2}\frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{a+bt^2} dt.$$

**2.3. Primitives de $P(x)e^{ax}$.** Ici $P$ est un polynôme et $a \in \mathbb{C}^*$. La fonction $x \to P(x)\mathrm{e}^{ax}$ est continue. On note $\mathbb{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$

**Proposition 2.3.** *Si $P \in \mathbb{P}_n$ et $a \neq 0$, on a*

$$\int P(x)e^{ax} dx = Q(x)e^{ax} + C$$

*où $Q \in \mathbb{P}_n$ et $C$ est une constante quelconque.*

Démonstration. Par intégration par parties, on a

$$\int P(x)\mathrm{e}^{ax} dx = \frac{1}{a}P(x)\mathrm{e}^{ax} - \frac{1}{a}\int P'(x)\mathrm{e}^{ax} dx.$$

D'où le résultat, par récurrence sur $n$. □

**Exemple 2.8.** On a

$$\int (2x^3 + 3x^2 - x + 1)\mathrm{e}^x dx = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\mathrm{e}^x + C,$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ vérifient

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta + \frac{d}{dx}(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) = 2x^3 + 3x^2 - x + 1$$

et $C$ est une constante quelconque. Soit

$$\alpha = 2 \quad \beta + 3\alpha = 3 \quad \gamma + 2\beta = -1 \quad \delta + \gamma = 1$$

donc

$$\alpha = 2 \quad \beta = -3 \quad \gamma = 5 \quad d = -4$$

et

$$\int (2x^3 + 3x^2 - x + 1)\mathrm{e}^x dx = (2x^3 - 3x^2 + 5x - 4)\mathrm{e}^x + C.$$

CHAPITRE 3

# Intégration généralisée

Il s'agit d'étendre la notion d'intégrale pour des fonctions définies sur des intervalles non bornés ou non fermés. Cette intégration est appelée *généralisée* ou *impropre*.

## 1. Définition de l'intégrale

**Définition 3.1.** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. On dit qu'elle est *localement intégrable* si elle est intégrable au sens de Riemann sur tout sous-intervalle fermé borné de $I$.

**Exemple 3.1.** (1) Toute fonction continue sur un intervalle $I$ est localement intégrable. La fonction
$$f : x \in [0, +\infty[ \to \sin x$$
est localement intégrable.
(2) Toute fonction monotone sur un intervalle $I$ est localement intégrable. La fonction
$$f : x \in ]0, 1] \to \frac{1}{x^2}$$
est localement intégrable.

**Proposition 3.1.** *L'ensemble des fonctions localement intégrables sur un intervalle $I$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

**Lemme 3.1.** *Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. Si $f$ est bornée et localement intégrable sur $]a, b[$, alors elle est intégrable sur $[a, b]$.*

Démonstration. Soit $M$ une borne de $f$ sur $[a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$. On définit $a'$ et $b'$ tels que
$$a < a' < \min\left(b, a + \frac{\varepsilon}{3M}\right) \quad \text{et} \quad \max\left(a, b - \frac{\varepsilon}{3M}\right) < b' < b.$$
Comme $f$ est intégrable sur $[a', b']$, il existe $\varphi$ et $\theta$ deux fonctions en escalier sur $[a', b']$ telles que
$$\forall x \in [a', b'] \quad |f(x) - \varphi(x)| \leq \theta(x),$$
$$\int_{a'}^{b'} \theta(x)dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$
On prolonge alors $\varphi$ et $\theta$ par $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{\theta}$, fonctions en escalier sur $[a, b]$ définies par
$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in [a', b'] \\ 0 & \text{si } x \in [a, b] \setminus [a', b'] \end{cases} \quad \text{et} \quad \widetilde{\theta}(x) = \begin{cases} \theta(x) & \text{si } x \in [a', b'] \\ M & \text{si } x \in [a, b] \setminus [a', b'] \end{cases}$$

On a
$$\forall x \in [a,b] \quad |f(x) - \widetilde{\varphi}(x)| \leq \widetilde{\theta}(x)$$
et
$$\int_a^b \widetilde{\theta}(x)dx = \int_a^{a'} M dx + \int_{a'}^{b'} \theta(x)dx + \int_{b'}^{b} M dx < (a'-a)M + \frac{\varepsilon}{3} + (b-b')M$$
$$< \varepsilon.$$
Comme $\varepsilon$ est quelconque, cela prouve que $f$ est intégrable sur $[a,b]$. □

**Proposition 3.2.** *Soit $f$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur un intervalle $[a,b]$, continue sur $]a,b[$ et bornée. Alors elle est intégrable au sens de Riemann.*

Démonstration. La fonction $f$ est bornée et localement intégrable : on utilise le lemme 3.1. □

**Exemple 3.2.** La fonction
$$f : x \in [-1,1] \to \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
est intégrable sur $[-1,1]$ : on utilise la proposition 3.2 sur $[-1,0]$ et sur $[0,1]$.

**Définition 3.2.** (1) Soit $f$ une fonction localement intégrable sur un intervalle $[a,b[$ ($a,b$ réels) ou $[a,+\infty[$ ($a$ réel), à valeurs réelles ou complexes. On dit que *son intégrale sur $[a,b[$ ou sur $[a,+\infty[$ est convergente* si la fonction
$$F : x \to \int_a^x f(t)dt$$
a une limite (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) quand $x \to b, x < b$ ou $x \to +\infty$. Cette limite est appelée *intégrale généralisée* de $f$ sur $[a,b[$ ou sur $[a,+\infty[$ et est notée
$$\int_a^b f(t)dt \quad \text{ou} \quad \int_a^{+\infty} f(t)dt.$$
Si la fonction $F$ n'a pas de limite (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) quand $x \to b, x < b$ ou $x \to +\infty$, on dit que *l'intégrale de $f$ sur $[a,b[$ ou sur $[a,+\infty[$ est divergente.*

(2) Soit $f$ une fonction localement intégrable sur un intervalle $]a,b]$ ($a,b$ réels) ou $]-\infty,b]$ ($b$ réel), à valeurs réelles ou complexes. On dit que *son intégrale sur $]a,b]$ ou sur $]-\infty,b]$ est convergente* si la fonction
$$\check{F} : x \to \int_x^b f(t)dt$$
a une limite (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) quand $x \to a, x > a$ ou $x \to -\infty$. Cette limite est appelée *intégrale généralisée* de $f$ sur $]a,b]$ ou sur $]-\infty,b]$ et est notée
$$\int_a^b f(t)dt \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{b} f(t)dt.$$
Si la fonction $\check{F}$ n'a pas de limite(dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) quand $x \to a, x > a$ ou $x \to -\infty$, on dit que *l'intégrale de $f$ sur $]a,b]$ ou sur $]-\infty,b]$ est divergente.*

**Remarque 3.1.** Soit $f$ une fonction intégrable sur un intervalle fermé $[a,b]$ ($a,b$ réels). Alors

– son intégrale sur $[a,b[$ est convergente et son intégrale généralisée sur $[a,b[$ est égale à son intégrale sur $[a,b]$ (en effet la fonction $F$ est continue en $b$) ;
– son intégrale sur $]a,b]$ est convergente et son intégrale généralisée sur $]a,b]$ est égale à son intégrale sur $[a,b]$ (en effet la fonction $\check{F}$ est continue en $a$).

Si $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $[a,b]$ ou $[a,b[$ ou $[a,+\infty[$ ou $]a,b]$ ou $]-\infty,b]$ et si $f$ est intégrable sur $I$, dans le cas où $I$ est fermé borné ou si l'intégrale de $f$ sur $I$ est convergente dans les autres cas, on note

$$\int_I f(x)dx$$

son intégrale, ou son intégrale généralisée.

**Remarque 3.2.** • Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a,b[$ ($a,b$ réels) ou $[a,+\infty[$ ($a$ réel), à valeurs réelles ou complexes. Soit $F$ une primitive de $f$ sur l'intervalle de définition. L'intégrale de $f$ sur $[a,b[$ ou sur $[a,+\infty[$ est convergente si et seulement si la fonction $F$ a une limite (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) quand $x \to b, x < b$ ou $x \to +\infty$.

• Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $]a,b]$ ($a,b$ réels) ou $]-\infty,b]$ ($b$ réel), à valeurs réelles ou complexes. Soit $F$ une primitive de $f$ sur l'intervalle de définition. L'intégrale de $f$ sur $]a,b]$ ou sur $]-\infty,b]$ est convergente si et seulement si la fonction $F$ a une limite (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) quand $x \to a, x > a$ ou $x \to -\infty$.

**Exemple 3.3.** (1) La fonction

$$f : x \in ]0,1] \to \frac{1}{\sqrt{x}}$$

est continue, donc localement intégrable sur $]0,1]$. On a, pour $0 < x \leq 1$,

$$\check{F}(x) = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = 2\big[\sqrt{t}\big]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x}.$$

Comme

$$\lim_{x\to 0, x>0}(2 - 2\sqrt{x}) = 2,$$

l'intégrale de $f$ sur $]0,1]$ est convergente et

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = 2.$$

(2) La fonction

$$f : x \in ]0,1] \to \operatorname{Ln} x$$

est continue, donc localement intégrable sur $]0,1]$. On a, pour $0 < x \leq 1$,

$$\check{F}(x) = \int_x^1 \operatorname{Ln} t dt = [t\operatorname{Ln} t - t]_x^1 = -1 - x\operatorname{Ln} x + x.$$

Comme

$$\lim_{x\to 0, x>0}(-1 - x\operatorname{Ln} x + x) = -1,$$

l'intégrale de $f$ sur $]0,1]$ est convergente et

$$\int_0^1 \operatorname{Ln} t dt = -1.$$

(3) La fonction
$$f : x \in [0, +\infty[ \to \frac{1}{1+x^2}$$
est continue, donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$. On a, pour $0 \leq x$,
$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \big[\operatorname{Arc\,tg} t\big]_0^x = \operatorname{Arc\,tg} x.$$
Comme
$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{Arc\,tg} x = \frac{\pi}{2},$$
l'intégrale de $f$ sur $[0, +\infty[$ est convergente et
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$
(4) La fonction
$$f : x \in [0, 1[ \to \frac{1}{1-x}$$
est continue, donc localement intégrable sur $[0, 1[$. On a, pour $0 \leq x < 1$,
$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\big[\operatorname{Ln}(1-t)\big]_0^x = -\operatorname{Ln}(1-x).$$
Comme
$$\lim_{x \to 1, x<1} (-\operatorname{Ln}(1-x)) = +\infty,$$
l'intégrale de $f$ sur $]0, 1]$ est divergente.

(5) La fonction
$$f : x \in ]-\infty, 0] \to \frac{1}{1-x}$$
est continue, donc localement intégrable sur $]-\infty, 0]$. On a, pour $x \leq 0$,
$$\check{F}(x) = \int_x^0 \frac{1}{1-t} dt = -\big[\operatorname{Ln}(1-t)\big]_x^0 = \operatorname{Ln}(1-x).$$
Comme
$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{Ln}(1-x) = +\infty,$$
l'intégrale de $f$ sur $]-\infty, 0]$ est divergente.

**Proposition 3.3.** *Une fonction localement intégrable sur un intervalle semi-ouvert $I$ a une intégrale sur $I$ qui converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire ont des intégrales sur $I$ qui convergent. Alors*
$$\int_I f(x)dx = \int_I Re\, f(x)dx + \imath \int_I Im\, f(x)dx$$
*c'est-à-dire*
$$Re\left(\int_I f(x)dx\right) = \int_I Re\, f(x)dx \quad et \quad Im\left(\int_I f(x)dx\right) = \int_I Im\, f(x)dx.$$

**Proposition 3.4.** *L'ensemble des fonctions localement intégrables sur un intervalle semi-ouvert $I$ dont l'intégrale sur $I$ est convergente est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'application*
$$f \to \int_I f(x)dx$$
*est linéaire.*

**Proposition 3.5.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions à valeurs réelles localement intégrables sur un intervalle semi-ouvert $I$ dont les intégrales sur $I$ sont convergentes. Si*

$$\forall x \in I \quad f(x) \leq g(x)$$

*alors*

$$\int_I f(x)dx \leq \int_I g(x)dx.$$

**Proposition 3.6.** *Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert $I$ à valeurs positives ou nulles dont l'intégrale sur $I$ est convergente. Si*

$$\int_I f(x)dx = 0$$

*alors*

$$\forall x \in I \quad f(x) = 0.$$

DÉMONSTRATION. Par exemple $I := [a, \beta[$, où $\beta = b \in \mathbb{R}$ ou $\beta = +\infty$. La fonction

$$F : x \in [a, \beta[ \to \int_a^x f(t)dt$$

est croissante, à valeurs positives ou nulles, de limite nulle en $\beta$ ; elle est donc identiquement nulle. □

**Proposition 3.7.** *On peut généraliser la relation de Chasles.*

(1) *Soit $f$ une fonction localement intégrable sur un intervalle $[a, b[$ ($a, b$ réels), à valeurs réelles ou complexes ; soit $c \in [a, b[$. L'intégrale de $f$ sur $[a, b[$ est convergente si et seulement si son intégrale sur $[c, b[$ est convergente. On a alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

(2) *Soit $f$ une fonction localement intégrable sur un intervalle $[a, +\infty[$ ($a$ réel), à valeurs réelles ou complexes ; soit $c \geq a$. L'intégrale de $f$ sur $[a, +\infty[$ est convergente si et seulement si son intégrale sur $[c, +\infty[$ est convergente. On a alors*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx.$$

(3) *Soit $f$ une fonction localement intégrable sur un intervalle $]a, b]$ ($a, b$ réels), à valeurs réelles ou complexes ; soit $c \in ]a, b]$. L'intégrale de $f$ sur $]a, b]$ est convergente si et seulement si son intégrale sur $]a, c]$ est convergente . On a alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

(4) *Soit $f$ une fonction localement intégrable sur un intervalle $]-\infty, b]$ ($b$ réel), à valeurs réelles ou complexes ; soit $c \leq b$. L'intégrale de $f$ sur $]-\infty, b]$ est convergente si et seulement si son intégrale sur $]-\infty, c]$ est convergente. On a alors*

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Démonstration. On démontre le (1) : pour $c \leq x < b$, on a

$$\int_c^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt - \int_a^c f(t)dt.$$

Donc

$$\lim_{x \to b, x < b} \int_c^x f(t)dt$$

existe et appartient à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ si et seulement si

$$\lim_{x \to b, x < b} \int_a^x f(t)dt$$

existe et appartient à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors

$$\lim_{x \to b, x < b} \int_c^x f(t)dt = \lim_{x \to b, x < b} \int_a^x f(t)dt - \int_a^c f(t)dt$$

qui donne le résultat. Les autres assertions se démontrent de même. □

**Définition 3.3.** (1) Soit $f$ une fonction localement intégrable sur un intervalle $]a, b[$ ($a, b$ réels), à valeurs réelles ou complexes. On dit que *son intégrale sur* $]a, b[$ *est convergente* si, pour un $c \in ]a, b[$, son intégrale sur $]a, c]$ et son intégrale sur $[c, b[$ sont convergentes. L'*intégrale généralisée* de $f$ sur $]a, b[$ est alors définie par

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

(2) Soit $f$ une fonction localement intégrable sur un intervalle $]a, +\infty[$ ($a$ réel), à valeurs réelles ou complexes. On dit que *son intégrale sur* $]a, +\infty[$ *est convergente* si, pour un $c > a$, son intégrale sur $]a, c]$ et son intégrale sur $[c, +\infty[$ sont convergentes. L'*intégrale généralisée* de $f$ sur $]a, +\infty[$ est alors définie par

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt := \int_a^c f(t)dt + \int_c^{+\infty} f(t)dt.$$

(3) Soit $f$ une fonction localement intégrable sur un intervalle $]-\infty, b[$ ($b$ réel), à valeurs réelles ou complexes. On dit que *son intégrale sur* $]-\infty, b[$ *est convergente* si, pour un $c < b$, son intégrale sur $]-\infty, c]$ et son intégrale sur $[c, b[$ sont convergentes. L'*intégrale généralisée* de $f$ sur $]-\infty, b[$ est alors définie par

$$\int_{-\infty}^b f(t)dt := \int_{-\infty}^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

(4) Soit $f$ une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. On dit que *son intégrale sur* $]-\infty, +\infty[$ *est convergente* si, pour un $c \in \mathbb{R}$, son intégrale sur $]-\infty, c]$ et son intégrale sur $[c, +\infty[$ sont convergentes. L'*intégrale généralisée* de $f$ sur $]-\infty, +\infty[$ est alors définie par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt := \int_{-\infty}^c f(t)dt + \int_c^{+\infty} f(t)dt.$$

**Remarque 3.3.** Ces notions ne dépendent pas du point $c$ choisi. On le démontre dans le premier cas : soit $a < c < d < b$. Pour $a < x \leq d$,

$$\int_x^d f(t)dt = \int_x^c f(t)dt + \int_c^d f(t)dt,$$

donc

$$\lim_{x\to ax>a}\int_x^d f(t)dt = \lim_{x\to ax>a}\int_x^c f(t)dt + \int_c^d f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^d f(t)dt,$$

par conséquent, l'intégrale de $f$ sur $]a,d]$ est convergente et

$$\int_a^d f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^d f(t)dt.$$

D'après la proposition 3.7, l'intégrale de $f$ sur $[d,b[$ est convergente et

$$\int_c^b f(t)dt = \int_c^d f(t)dt + \int_d^b f(t)dt.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_a^d f(t)dt + \int_d^b f(t)dt &= \int_a^c f(t)dt + \int_c^d f(t)dt + \int_c^b f(t)dt - \int_c^d f(t)dt\\ &= \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

La relation de Chasles généralisée est par conséquent établie.

**Remarque 3.4.** Soit $f$ une fonction intégrable sur un intervalle fermé $[a,b]$ ($a,b$ réels). Alors son intégrale sur $]a,b[$ est convergente et son intégrale généralisée sur $]a,b[$ est égale à son intégrale sur $[a,b]$ : cela vient de la remarque 3.1 et de la relation de Chasles.

**Remarque 3.5.** • Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $]a,b[$ ($a,b$ réels), à valeurs réelles ou complexes. Soit $F$ une primitive de $f$ sur l'intervalle de définition. L'intégrale de $f$ sur $]a,b[$ est convergente si et seulement si $F$ a une limite (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) quand $x\to a, x>a$ et quand $x\to b, x<b$. L'intégrale généralisée de $f$ sur $]a,b[$ est alors

$$\lim_{x\to b,x<b} F(x) - \lim_{x\to a,x>a} F(x).$$

• Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $]a,+\infty[$ ($a$ réel), à valeurs réelles ou complexes. Soit $F$ une primitive de $f$ sur l'intervalle de définition. L'intégrale de $f$ sur $]a,+\infty[$ est convergente si et seulement si $F$ a une limite (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) quand $x\to a, x>a$ et quand $x\to+\infty$. L'intégrale généralisée de $f$ sur $]a,+\infty[$ est alors

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to a,x>a} F(x).$$

• Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $]-\infty,b[$ ($b$ réel), à valeurs réelles ou complexes. Soit $F$ une primitive de $f$ sur l'intervalle de définition. L'intégrale de $f$ sur $]-\infty,b[$ est convergente si et seulement si $F$ a une limite (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) quand $x\to-\infty$ et quand $x\to b, x<b$. L'intégrale généralisée de $f$ sur $]-\infty,b[$ est alors

$$\lim_{x\to b,x<b} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

• Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. Soit $F$ une primitive de $f$ sur l'intervalle de définition. L'intégrale de $f$ sur $]-\infty,+\infty[$

est convergente si et seulement si $F$ a une limite (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) quand $x \to -\infty$ et quand $x \to +\infty$. L'intégrale généralisée de $f$ sur $]-\infty, +\infty[$ est alors

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

Si $I$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et si l'intégrale de $f$ sur $I$ est convergente, on note

$$\int_I f(x)dx$$

son intégrale généralisée.

**Exemple 3.4.** La fonction

$$f : x \in ]-1, 1[ \to \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

est continue, donc localement intégrable sur $]-1, 1[$. On a, pour $-1 < x \leq 0$,

$$\check{F}(x) = \int_x^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \left[\operatorname{Arc}\sin t\right]_x^0 = -\operatorname{Arc}\sin x.$$

Comme

$$\lim_{x\to-1, x>-1} (-\operatorname{Arc}\sin x) = \frac{\pi}{2},$$

l'intégrale de $f$ sur $]-1, 0]$ est convergente et

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{\pi}{2}.$$

On a, pour $0 \leq x < 1$,

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \left[\operatorname{Arc}\sin t\right]_0^x = \operatorname{Arc}\sin x.$$

Comme

$$\lim_{x\to1, x<1} (\operatorname{Arc}\sin x) = \frac{\pi}{2},$$

l'intégrale de $f$ sur $[0, 1[$ est convergente et

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{\pi}{2}.$$

Finalement, l'intégrale de $f$ sur $]-1, 1[$ est convergente et

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \pi.$$

**Remarque 3.6.** (1) Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle borné $]a, b]$ ou $[a, b[$ ou $]a, b[$, localement intégrable et bornée. On peut la prolonger de manière quelconque à l'intervalle $[a, b]$ : soit $\widetilde{f}$. Cette fonction est localement intégrable sur $]a, b[$ et bornée : d'après le lemme 3.1, la fonction $\widetilde{f}$ est intégrable. L'intégrale de $f$ sur $]a, b[$ ou $[a, b[$ ou $]a, b[$ est convergente et son intégrale généralisée est

$$\int_a^b \widetilde{f}(x)dx.$$

En effet les fonctions $F$ et $\check{F}$ sont continues sur $[a, b]$.

(2) On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est *à support compact* s'il existe un intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [a, b] \quad f(x) = 0.$$

Si $f$ est intégrable sur $[a, b]$, alors l'intégrale de $f$ sur $]-\infty, +\infty[$ est convergente et son intégrale généralisée est

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

**Proposition 3.8.** *Une fonction localement intégrable sur un intervalle ouvert $I$ a une intégrale sur $I$ qui converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire ont des intégrales sur $I$ qui convergent. Alors*

$$\int_I f(x)dx = \int_I Re\, f(x)dx + \imath \int_I Im\, f(x)dx$$

*c'est-à-dire*

$$Re\left(\int_I f(x)dx\right) = \int_I Re\, f(x)dx \quad et \quad Im\left(\int_I f(x)dx\right) = \int_I Im\, f(x)dx.$$

**Proposition 3.9.** *L'ensemble des fonctions localement intégrables sur un intervalle ouvert $I$ dont l'intégrale sur $I$ est convergente est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'application*

$$f \to \int_I f(x)dx$$

*est linéaire.*

**Proposition 3.10.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions à valeurs réelles localement intégrables sur un intervalle ouvert $I$ dont les intégrales sur $I$ sont convergentes. Si*

$$\forall x \in I \quad f(x) \leq g(x)$$

*alors*

$$\int_I f(x)dx \leq \int_I g(x)dx.$$

**Proposition 3.11.** *Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle ouvert $I$ à valeurs positives ou nulles dont l'intégrale sur $I$ est convergente. Si*

$$\int_I f(x)dx = 0$$

*alors*

$$\forall x \in I \quad f(x) = 0.$$

## 2. Existence et calcul d'intégrales généralisées

**Exemple 3.5.** Soit $p \in \mathbb{R}$.

(1) On regarde la convergence de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx.$$

- Si $p < 1$, on a pour $\varepsilon > 0$,
$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p}\left(1 - \varepsilon^{1-p}\right) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} \frac{1}{1-p},$$
l'intégrale est convergente.
- Si $p = 1$, on a pour $\varepsilon > 0$,
$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x} dx = -\mathrm{Ln}\, \varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\to} +\infty,$$
l'intégrale est divergente.
- Si $p > 1$, on a pour $\varepsilon > 0$,
$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{p-1}} - 1\right) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} +\infty,$$
l'intégrale est divergente.

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ converge si et seulement si $p < 1$.

(2) On regarde la convergence de l'intégrale
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx.$$
- Si $p < 1$, on a pour $A > 0$,
$$\int_1^{A} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p}\left(A^{1-p} - 1\right) \underset{A \to +\infty}{\to} +\infty,$$
l'intégrale est divergente.
- Si $p = 1$, on a pour $A > 0$,
$$\int_1^{A} \frac{1}{x} dx = \mathrm{Ln}\, A \underset{A \to +\infty}{\to} +\infty,$$
l'intégrale est divergente.
- Si $p > 1$, on a pour $A > 0$,
$$\int_1^{A} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{A^{p-1}}\right) \underset{A \to +\infty}{\to} \frac{1}{p-1},$$
l'intégrale est convergente.

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ converge si et seulement si $p > 1$.

(3) Par conséquent l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$$
est toujours divergente.

Du théorème de changement de variable, on déduit la proposition suivante.

**Proposition 3.12.** *Soit $\phi$ une fonction bijective continûment dérivable d'un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ (ouvert, semi-ouvert, borné ou non), à valeurs dans un intervalle $J$ de $\mathbb{R}$ (qui est aussi ouvert, semi-ouvert, borné ou non); soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $J$, à valeurs réelles ou complexes. L'intégrale de $f$ sur $J$*

*est convergente si et seulement si l'intégrale de $f \circ \phi\,|\phi'|$ sur $I$ est convergente. On a dans ce cas*

$$\int_J f(y)dy = \int_I f \circ \phi(x)|\phi'(x)|dx.$$

Démonstration. On fait la démonstration pour $I = [a, b[$ (avec $a, b$ réels). La fonction continue $\phi$ définie sur $[a, b[$ est injective, donc elle est strictement monotone et $\phi^{-1}$ également.

• Supposons $\phi$ strictement croissante (comme $\phi^{-1}$) ; alors, en notant $c := \phi(a)$, on a

– $J = [c, d[$ (avec $d$ réel), si $\lim\limits_{x\to b, x<b} \phi(x) = d$ ; alors $\lim\limits_{y\to d, y<d} \phi^{-1}(y) = b$.

– $J = [c, +\infty[$, si $\lim\limits_{x\to b, x<b} \phi(x) = +\infty$ ; alors $\lim\limits_{y\to+\infty} \phi^{-1}(y) = b$.

De plus pour tout $x \in [a, b[$, on a $\phi'(x) \geq 0$. La fonction $f \circ \phi\,\phi'$ est continue. Soit $x \in [a, b[$ : d'après le théorème 2.2, on a

$$\int_c^{\phi(x)} f(u)du = \int_a^x f \circ \phi(t)\phi'(t)dt.$$

Si l'intégrale de $f$ sur $J$ est convergente, on a

$$\lim_{y\to d, y<d} \int_c^y f(u)du = \int_J f(u)du \quad \text{ou} \quad \lim_{y\to+\infty} \int_c^y f(u)du = \int_J f(u)du.$$

Alors

$$\lim_{x\to b, x<b} \int_c^{\phi(x)} f(u)du = \int_J f(u)du.$$

Donc

$$\lim_{x\to b, x<b} \int_a^x f \circ \phi(t)\phi'(t)dt = \int_J f(u)du,$$

l'intégrale de $f \circ \phi\,\phi'$ sur $[a, b[$ est convergente et

$$\int_a^b f \circ \phi(t)\phi'(t)dt = \int_J f(u)du.$$

Réciproquement, si l'intégrale de $f \circ \phi\,\phi'$ sur $[a, b[$ est convergente, on a

$$\lim_{x\to b, x<b} \int_a^x f \circ \phi(t)\phi'(t)dt = \int_a^b f \circ \phi(t)\phi'(t)dt.$$

Alors

$$\lim_{y\to d, y<d} \int_a^{\phi^{-1}(y)} f \circ \phi(t)\phi'(t)dt = \int_a^b f \circ \phi(t)\phi'(t)dt$$

ou

$$\lim_{y\to+\infty} \int_a^{\phi^{-1}(y)} f \circ \phi(t)\phi'(t)dt = \int_a^b f \circ \phi(t)\phi'(t)dt.$$

Comme pour tout $y \in [c, d[$ ou tout $y \in [c, +\infty[$, on a

$$\int_c^y f(u)du = \int_a^{\phi^{-1}(y)} f \circ \phi(t)\phi'(t)dt,$$

on déduit de ce qui précède :

$$\lim_{y\to d, y<d} \int_c^y f(u)du = \int_a^b f \circ \phi(t)\phi'(t)dt$$

ou

$$\lim_{y\to+\infty}\int_c^y f(u)du=\int_a^b f\circ\phi(t)\phi'(t)dt,$$

l'intégrale de $f$ sur $J$ est convergente et

$$\int_J f(u)du=\int_a^b f\circ\phi(t)\phi'(t)dt.$$

• Si $\phi$ est strictement décroissante (comme $\phi^{-1}$) ; alors, en notant $d:=\phi(a)$, on a

– $J=]c,d]$ (avec ($c$ réel), si $\lim_{x\to b,x<b}\phi(x)=c$ ; alors $\lim_{y\to c,y>c}\phi^{-1}(y)=b$.

– $J=]-\infty,d]$, si $\lim_{x\to b,x<b}\phi(x)=-\infty$ ; alors $\lim_{y\to-\infty}\phi^{-1}(y)=b$.

De plus pour tout $x\in[a,b[$, on a $\phi'(x)\le 0$. La fonction $f\circ\phi\,\phi'$ est continue. Soit $x\in[a,b[$ : on a

$$-\int_{\phi(x)}^d f(u)du=\int_a^x f\circ\phi(t)\phi'(t)dt.$$

Si l'intégrale de $f$ sur $J$ est convergente, on a

$$\lim_{y\to c,y>c}\int_y^d f(u)du=\int_J f(u)du\quad\text{ou}\quad\lim_{y\to-\infty}\int_y^d f(u)du=\int_J f(u)du.$$

Alors

$$\lim_{x\to b,x<b}\int_{\phi(x)}^d f(u)du=\int_J f(u)du.$$

Donc

$$\lim_{x\to b,x<b}\int_a^x f\circ\phi(t)\phi'(t)dt=-\int_J f(u)du,$$

l'intégrale de $f\circ\phi\,\phi'$ sur $[a,b[$ est convergente et

$$-\int_a^b f\circ\phi(t)\phi'(t)dt=\int_J f(u)du.$$

Réciproquement, si l'intégrale de $f\circ\phi\,\phi'$ sur $[a,b[$ est convergente, on a

$$\lim_{x\to b,x<b}\int_a^x f\circ\phi(t)\phi'(t)dt=\int_a^b f\circ\phi(t)\phi'(t)dt.$$

Alors

$$\lim_{y\to c,y>c}\int_a^{\phi^{-1}(y)} f\circ\phi(t)\phi'(t)dt=\int_a^b f\circ\phi(t)\phi'(t)dt$$

ou

$$\lim_{y\to-\infty}\int_a^{\phi^{-1}(y)} f\circ\phi(t)\phi'(t)dt=\int_a^b f\circ\phi(t)\phi'(t)dt.$$

Comme pour tout $y\in]c,d]$ ou tout $y\in]-\infty,d]$, on a

$$\int_y^d f(u)du=\int_{\phi^{-1}(y)}^d f\circ\phi(t)\phi'(t)dt,$$

on déduit de ce qui précède :

$$\lim_{y\to c,y>c}\int_y^d f(u)du=-\int_a^b f\circ\phi(t)\phi'(t)dt$$

ou

$$\lim_{y\to-\infty}\int_y^d f(u)du = -\int_a^b f\circ\phi(t)\phi'(t)dt,$$

l'intégrale de $f$ sur $J$ est convergente et

$$\int_J f(u)du = -\int_a^b f\circ\phi(t)\phi'(t)dt.$$

La démonstration est analogue dans les autres cas. $\square$

**Exemple 3.6.** Soient $a<b$ des réels ; soit $p\in\mathbb{R}$. L'intégrale

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx$$

converge si et seulement si $p<1$ : on utilise le changement de variable

$$x\to y=x-a.$$

**Exemple 3.7.** Soit $p\geq 0$.

(1) Pour $0<a<1$, on regarde la convergence de l'intégrale

$$\int_0^a \frac{1}{x|\mathrm{Ln}\,x|^p}dx.$$

On fait le changement de variable $x\to u:=-\mathrm{Ln}\,x$ ; avec $u'=-\dfrac{1}{x}$. Alors, l'intégrale proposée converge si et seulement si l'intégrale transformée

$$\int_{\mathrm{Ln}\,(1/a)}^{+\infty}\frac{1}{u^p}du$$

converge, ce qui est vrai si et seulement si $p>1$.

(2) Pour $1<a$, on regarde la convergence de l'intégrale

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x(\mathrm{Ln}\,x)^p}dx.$$

On fait le changement de variable $x\to u:=\mathrm{Ln}\,x$ ; avec $u'=\dfrac{1}{x}$. Alors, l'intégrale proposée converge si et seulement si l'intégrale transformée

$$\int_{\mathrm{Ln}\,a}^{+\infty}\frac{1}{u^p}du$$

converge, ce qui est vrai si et seulement si $p>1$

**Exemple 3.8.** Pour $a<b$ des réels, on examine la convergence de l'intégrale

$$\int_a^b\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx.$$

Soit

$$\phi : t\in]0,+\infty[\to\frac{bt^2+a}{t^2+1}\in]a,b[.$$

C'est une fonction surjective, strictement croissante, de classe $\mathcal{C}^1$. On a

$$\forall t>0\quad \phi'(t)=2(b-a)\frac{t}{(t^2+1)^2}.$$

Alors
$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \pi.$$
Donc l'intégrale est convergente

Du théorème d'intégration par parties 2.3, on déduit facilement la propostiion suivante.

**Proposition 3.13.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions continûment dérivables sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ (ouvert, semi-ouvert, borné ou non), à valeurs réelles ou complexes. On note $\alpha$ et $\beta$ les extrémités gauche et droite (éventuellement infinies) de $I$ ; on suppose*
$$\lim_{x\to\alpha, x>\alpha} f(x)g(x) = A \quad et \quad \lim_{x\to\beta, x<\beta} f(x)g(x) = B.$$
*L'intégrale de $fg'$ sur $I$ est convergente si et seulement si l'intégrale de $f'g$ sur $I$ l'est. On a dans ce cas*
$$\int_I f(x)g'(x)dx = B - A - \int_I f'(x)g(x)dx.$$

Démonstration. Il suffit d'écrire pour tous les couples $a, b \in I$ :
$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$
et de faire $a \to \alpha$ et $b \to \beta$. □

**Exemple 3.9.** Calcul de
$$\Gamma(n) := \int_0^{+\infty} x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}dx,$$
pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a, pour $x \geq 0$
$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t}dt = -\big[\mathrm{e}^{-t}\big]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{\to} 1,$$
donc $\Gamma(1) = 1$. Supposons que l'on puisse définir $\Gamma(m)$, pour $1 \leq m \leq n$ ; pour $x \geq 0$,
$$\begin{aligned}\int_0^x t^n\mathrm{e}^{-t}dt &= -\big[t^n\mathrm{e}^{-t}\big]_0^x + n\int_0^x t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}dt \\ &= -x^n\mathrm{e}^{-x} + n\int_0^x t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}dt \underset{x\to+\infty}{\to} n\Gamma(n).\end{aligned}$$
On peut donc définir $\Gamma(n+1)$ et $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$. Finalement
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

Dans la suite, on se limite a des intégrales sur des intervalles de la forme
$$I := [a, b[ \quad \text{ou} \quad I := [a, +\infty[ \quad \text{(avec } a \text{ réel).}$$
que l'on notera $[a, \beta[$. Si $F$ est une primitive de $f$, fonction localement intégrable sur $[a, \beta[$, l'intégrale de $f$ sur $[a, \beta[$ converge si et seulement si
$$\lim_{x\to\beta} F(x) \quad \text{existe (dans } \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}).$$

L'étude sur des intervalles de la forme

$$]a, b] \quad \text{ou} \quad ]-\infty, b] \quad (\text{avec } b \text{ réel})$$

est analogue. L'étude sur des intervalles de la forme

$$]a, b[ \quad (\text{avec } a, b \text{ réels}) \quad \text{ou} \quad ]-\infty, +\infty[$$

se décompose dans les cas mentionnés.

**Proposition 3.14.** *Soit $f$ une fonction localement intégrable sur $[a, \beta[$, à valeurs positives ou nulles. L'intégrale de $f$ sur $[a, \beta[$ converge si et seulement si il existe $M \geq 0$ tel que*

$$\forall x \in [a, \beta[ \quad \int_a^x f(t)dt \leq M.$$

*Alors*

$$\int_a^\beta f(t)dt = \max_{x \in [a,\beta[} \int_a^x f(t)dt.$$

Démonstration. La fonction

$$F : x \in [a, \beta[ \to \int_a^x f(t)dt$$

est croissante. Elle a une limite finie en $\beta$ si et seulement si elle est majorée. □

**Proposition 3.15.** *Soit $f$ une fonction localement intégrable sur $[a, \beta[$, à valeurs positives ou nulles ; soit*

$$F : x \in [a, \beta[ \to \int_a^x f(t)dt.$$

*L'intégrale de $f$ sur $[a, \beta[$ converge si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_n$ qui converge vers $\beta$, telle que la suite $(F(x_n))_n$ converge. Dans ce cas l'intégrale généralisée de $f$ sur $[a, \beta[$ est égale à cette limite.*

**Remarque 3.7.** Pour une fonction $f$ localement intégrable sur $[a, \beta[$, à valeurs positives ou nulles dont l'intégrale sur $[a, \beta[$ diverge, on écrit

$$\int_a^\beta f(x)dx = +\infty.$$

**Corollaire.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions localement intégrables sur $[a, \beta[$, à valeurs positives ou nulles. On suppose qu'il existe $c \geq a$ tel que*

$$\forall x \in [c, \beta[ \quad f(x) \leq g(x).$$

*Dans ce cas,*
- *si l'intégrale de $g$ sur $[a, \beta[$ converge, alors l'intégrale de $f$ sur $[a, \beta[$ converge ;*
- *si l'intégrale de $f$ sur $[a, \beta[$ diverge, alors l'intégrale de $g$ sur $[a, \beta[$ diverge.*

**Exemple 3.10.** (1) On a

$$\forall x \geq 1 \quad \mathrm{e}^{-x^2} \leq \mathrm{e}^{-x}.$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}dx$ converge, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}dx$ converge.

(2) On a

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \quad 0 < \sin x < x,$$

donc

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \quad 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}.$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x} dx$ diverge, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x} dx$ diverge.

**Proposition 3.16.** *Soit $f$ une fonction localement intégrable sur $[a, \beta[$, à valeurs réelles ou complexes ; soit*

$$F : x \in [a, \beta[ \to \int_a^x f(t)dt.$$

*L'intégrale de $f$ sur $[a, \beta[$ converge si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ qui converge vers $\beta$, la suite $(F(x_n))_n$ a une limite dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$* [1]*. Dans ce cas l'intégrale généralisée de $f$ sur $[a, \beta[$ est égale à cette limite.*

**Proposition 3.17.** *Soit $f$ une fonction localement intégrable sur $[a, \beta[$, à valeurs réelles ou complexes. L'intégrale de $f$ sur $[a, \beta[$ converge si et seulement si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c \in [a, \beta[$ tel que*

$$\forall x, y \in [c, \beta[ \quad \left| \int_x^y f(t)dt \right| < \varepsilon.$$

Démonstration. On note

$$F : x \in [a, \beta[ \to \int_a^x f(t)dt.$$

- On suppose que l'intégrale

  $$\int_a^\beta f(x)dx$$

  converge : on note $I$ sa valeur. Alors

  $$I = \lim_{x \to \beta} F(x).$$

  Soit $\varepsilon > 0$ : il existe $c \in [a, \beta[$ tel que

  $$\forall x \in [c, \beta[ \quad |F(x) - I| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

  Donc

  $$\forall x, y \in [c, \beta[ \quad \left| \int_x^y f(t)dt \right| = |F(y) - F(x)| \leq |F(y) - I| + |I - F(x)| < \varepsilon.$$

- Réciproquement, on suppose que la condition

  $$\forall \varepsilon > 0 \; \exists c \in [a, \beta[ \; \forall x, y \in [c, \beta[ \quad \left| \int_x^y f(t)dt \right| < \varepsilon.$$

  est satisfaite. Soit $(x_n)_n$ une suite qui converge vers $\beta$. Soit $\varepsilon > 0$ : il existe $c \in [a, \beta[$ tel que

  $$\forall x, y \in [c, \beta[ \quad |F(y) - F(x)| < \varepsilon.$$

1. Cette limite ne dépend pas du choix de la suite $(x_n)_n$ : si l'on considère deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ et si les limites des images $(f(x_n))_n$ et $(f(y_n))_n$ étaient différentes, la suite des images entrelacées ne convergerait pas.

Et il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq p \quad c \leq x_n \leq \beta.$$

Par conséquent

$$\forall m, n \geq p \quad x_m, x_n \in [c, \beta[ \quad \text{donc} \quad |F(x_n) - F(x_m)| < \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon$ est quelconque, cela prouve que la suite $(F(x_n))_n$ est une suite de Cauchy ; elle converge donc. D'où le résultat, d'après la proposition 3.16.

L'équivalence proposée est donc prouvée. □

**Définition 3.4.** Soit $f$ une fonction localement intégrable sur $[a, \beta[$, à valeurs réelles ou complexes. On dit que l'intégrale de $f$ sur $[a, \beta[$ est *absolument convergente* si l'intégrale

$$\int_a^\beta |f(x)| dx$$

converge.

**Proposition 3.18.** *Soit $f$ une fonction localement intégrable sur $[a, \beta[$, à valeurs réelles ou complexes. Si son intégrale sur $[a, \beta[$ est absolument convergente, alors elle est convergente et*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Démonstration. On utilise l'équivalence de la proposition 3.17. Soit $\varepsilon > 0$. Comme l'intégrale de $f$ sur $[a, \beta[$ est absolument convergente, il existe $c \in [a, \beta[$ tel que

$$\forall x, y \in [c, \beta[ \quad \int_x^y |f(t)| dt < \varepsilon.$$

Alors

$$\forall x, y \in [c, \beta[ \quad \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \int_x^y |f(t)| dt < \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon$ est quelconque, cela prouve que intégrale de $f$ est convergente. □

**Théorème 3.1.** *Soit $f$ une fonction localement intégrable sur $[a, \beta[$, à valeurs réelles ou complexes. On suppose qu'il existe $c \in [a, \beta[$ et $\varphi$ une fonction localement intégrable sur $[c, \beta[$, à valeurs positives ou nulles tels que*

- $\forall x \in [c, \beta[ \quad |f(x)| \leq \varphi(x)$,
- *l'intégrale* $\displaystyle\int_c^\beta \varphi(x) dx$ *converge*

*Alors l'intégrale de $f$ sur $[a, \beta[$ est absolument convergente.*

Démonstration. l'intégrale de $f$ sur $[a, \beta[$ est absolument convergente d'après le corollaire de la proposition 3.14. □

**Exemple 3.11.** Soit la fonction

$$x \in \mathbb{R} \to \frac{\sin x}{1 + x^2}.$$

Elle est continue. Comme

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left| \frac{\sin x}{1 + x^2} \right| \leq \frac{1}{1 + x^2}$$

et que l'intégrale de $x \to 1/(1+x^2)$ sur $]-\infty, +\infty[$ est convergente, l'intégrale de $f$ sur $]-\infty, +\infty[$ est également convergente.

**Proposition 3.19.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions localement intégrables sur $[a, \beta[$, à valeurs positives ou nulles, équivalentes au voisinage de $\beta$. Si l'intégrale de l'une sur $[a, \beta[$ converge, alors l'intégrale de l'autre sur $[a, \beta[$ converge également.*

Démonstration. Il existe $c \in [a, \beta[$ tel que

$$\forall x \in [c, \beta[ \quad f(x) = g(x)r(x)$$

avec $\lim_{x \to b} r(x) = 1$. Il existe alors $d \in [c, \beta[$ tel que

$$\forall x \in [d, \beta[ \quad \frac{1}{2} \leq r(x) \leq \frac{3}{2}.$$

Alors

$$\forall x \in [d, \beta[ \quad 0 \leq g(x) \leq 2f(x) \quad \text{et} \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{3}{2}g(x).$$

D'où le résultat. □

**Exemple 3.12.** Soit la fonction

$$x \in \mathbb{R}_+ \to \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Elle est continue, à valeurs positives ou nulles. Comme

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \sim \frac{1}{x^2} \quad \text{au voisinage de } +\infty$$

et que l'intégrale de $x \to 1/x^2$ sur $[1, +\infty[$ est convergente, l'intégrale de $f$ sur $[0, +\infty[$ est également convergente.

**Exemple 3.13.** Soit la fonction

$$f : x \in [1, +\infty[ \to \frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

Elle est continue, donc localement intégrable. Soit $a > 1$ ; on a

$$\int_1^a \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \left[\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right]_1^a + \frac{1}{2}\int_1^a \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx.$$

Comme

$$\lim_{a \to +\infty} \frac{\sin a}{\sqrt{a}} = 0$$

et

$$\forall x > 1 \quad \left|\frac{\sin x}{x^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{x^{3/2}}$$

et que l'intégrale de $x \to 1/x^{3/2}$ sur $[1, +\infty[$ est convergente, l'intégrale de $f$ sur $[1, +\infty[$ est également convergente.

Soit la fonction

$$h : x \in [1, +\infty[ \to \frac{\cos^2 x}{x}.$$

Elle est continue, donc localement intégrable. Soit $a > 1$ ; on a

$$\begin{aligned}\int_1^a \frac{\cos^2 x}{x}dx &= \frac{1}{2}\int_1^a \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\int_1^a \frac{\cos(2x)}{x}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_1^a \frac{1}{x}dx + \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(2x)}{x}\right]_1^a + \frac{1}{4}\int_1^a \frac{\sin(2x)}{x^2}dx.\end{aligned}$$

Comme l'intégrale de $x \to 1/x$ sur $[1, +\infty[$ est divergente,

$$\lim_{a\to+\infty} \frac{\sin(2a)}{a} = 0$$

et

$$\forall x > 1 \quad \left|\frac{\sin(2x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

et que l'intégrale de $x \to 1/x^2$ sur $[1, +\infty[$ est convergente, l'intégrale de $h$ sur $[1, +\infty[$ est divergente.

Soit $g := f + h$. D'après ce qui précède, son intégrale sur $[1, +\infty[$ est divergente. On a, pour $x > 1$

$$g(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \frac{\cos^2 x}{x} = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right) = f(x)\left(1 + \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right)$$

et

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right) = 1,$$

donc $f$ et $g$ sont équivalentes au voisinage de $+\infty$. Mais $f$ et $g$ ne sont pas de signe constant.

**Proposition 3.20.** *Soit $f$ une fonction localement intégrable sur $[a, \beta[$, à valeurs réelles ou complexes ; soit $g$ une fonction localement intégrable sur $[a, \beta[$ à valeurs strictement positives, telles que*

$$\lim_{x\to\beta} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell,$$

*où $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell \in \mathbb{C}$. Alors*

(1) *si l'intégrale de $g$ sur $[a, \beta[$ converge, alors l'intégrale de $f$ sur $[a, \beta[$ est absolument convergente ;*

(2) *dans le cas où $\ell \neq 0$, si l'intégrale de $g$ sur $[a, \beta[$ diverge, alors l'intégrale de $f$ sur $[a, \beta[$ est également divergente.*

Démonstration. (1) Il existe $c \in [a, \beta[$ tel que

$$\forall x \in [c, \beta[ \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| \leq 1.$$

Alors

$$\forall x \in [c, \beta[ \quad |f(x)| \leq (|\ell| + 1)g(x),$$

d'où le résultat, d'après le théorème 3.1.

(2) En faisant le raisonnement sur $\operatorname{Re} f$ et sur $\operatorname{Im} f$ (en remarquant que $\operatorname{Re}\ell$ ou $\operatorname{Im}\ell$ n'est pas nul), on peut supposer que $f$ est à valeurs réelles, et que $\ell \in \mathbb{R}^*$. On peut encore supposer $\ell > 0$ (sinon on raisonne sur $-f$). Il existe $c \in [a, \beta[$ tel que

$$\forall x \in [c, \beta[ \quad \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \geq -\frac{\ell}{2}.$$

Alors

$$\forall x \in [c, \beta[ \quad 0 \leq g(x) \leq \frac{2}{\ell} f(x),$$

d'où le résultat, d'après le corollaire de la proposition 3.15. □

**Corollaire 1.** *Soit $f$ une fonction localement intégrable sur $]a, b]$ ($a, b$ réels), à valeurs réelles ou complexes. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tels que*

$$\lim_{x \to a, x > a} (x-a)^p f(x) = \ell.$$

*Dans ce cas*

(1) *si $p < 1$, alors l'intégrale de $f$ sur $]a, b]$ est absolument convergente ;*
(2) *dans le cas où $\ell \neq 0$, si $p \geq 1$, alors l'intégrale de $f$ sur $]a, b]$ est divergente.*

Démonstration. Soit

$$g : x \in ]a, b] \to \frac{1}{(x-a)^p}.$$

On utilise alors la proposition 3.20. □

**Corollaire 2.** *Soit $f$ une fonction localement intégrable sur $[a, +\infty[$ ($a$ réel), à valeurs réelles ou complexes. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tels que*

$$\lim_{x \to +\infty} x^p f(x) = \ell.$$

*Dans ce cas*

(1) *si $p > 1$, alors l'intégrale de $f$ sur $[a, +\infty[$ est absolument convergente ;*
(2) *dans le cas où $\ell \neq 0$, si $p \leq 1$, alors l'intégrale de $f$ sur $[a, +\infty[$ est divergente.*

Démonstration. Soit

$$g : x \in ]a, b] \to \frac{1}{x^p}.$$

On utilise alors la proposition 3.20. □

**Proposition 3.21.** *Soit $f$ une fonction localement intégrable sur $[a, \beta[$, à valeurs réelles ; soit $g$ une fonction localement intégrable sur $[a, \beta[$ à valeurs strictement positives, telles que*

$$\lim_{x \to \beta} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty \quad ou \quad \lim_{x \to \beta} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

*Si l'intégrale de $g$ sur $[a, \beta[$ diverge, alors l'intégrale de $f$ sur $[a, \beta[$ est également divergente.*

Démonstration. Si

$$\lim_{x \to \beta} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty,$$

il existe $c \in [a, \beta[$ tel que

$$\forall x \in [c, \beta[ \quad \frac{f(x)}{g(x)} < -1.$$

Alors

$$\forall x \in [c, \beta[ \quad 0 < g(x) < -f(x),$$

d'où le résultat, d'après le corollaire de la proposition 3.15.

Si

$$\lim_{x\to\beta}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty,$$

il existe $c\in[a,\beta[$ tel que

$$\forall x\in[c,\beta[\quad \frac{f(x)}{g(x)}>1.$$

Alors

$$\forall x\in[c,\beta[\quad 0<g(x)<f(x),$$

d'où le résultat, d'après le corollaire de la proposition 3.15. □

**Exemple 3.14.** Soient $P,Q$ deux polynômes à coefficients réels ou complexes, premiers entre eux. L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx \tag{3.1}$$

converge si et seulement si

(1) $Q$ n'a pas de zéro réel

(2) $\deg(Q)\geq\deg(P)+2$.

On utilise les deux corollaires.

- Supposons $Q$ a un zéro réel $a\in\mathbb{R}$, d'ordre $p$. Alors $p\in\mathbb{N}^*$ et il existe $\ell\in\mathbb{C}$ tel que
$$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^pP(x)}{Q(x)}=\ell.$$
Comme $P(a)\neq 0$, on a $\ell\neq 0$. Donc l'intégrale (3.1) est divergente.
- Supposons $\deg(Q)\leq\deg(P)+1$ : il existe $p\in\mathbb{Z}, p\leq 1$ et $\ell\in\mathbb{C}^*$ tels que
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^pP(x)}{Q(x)}=\ell.$$
Donc l'intégrale (3.1) est divergente.
- Supposons que $Q$ n'a pas de zéro réel et $\deg(Q)\geq\deg(P)+2$. Alors
  (1) la fraction $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est continue, donc localement intégrable sur $\mathbb{R}$.
  (2) il existe $\ell,\ell'\in\mathbb{C}$ tels que
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2P(x)}{Q(x)}=\ell \quad\text{et}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2P(x)}{Q(x)}=\ell$$
Donc l'intégrale (3.1) est convergente.

**Exemple 3.15.** Soient $p,q\in\mathbb{R}$.

(1) Soit $0<a<1$ ; on examine la convergence de l'intégrale

$$\int_0^a\frac{|\mathrm{Ln}\,x|^p}{x^q}dx. \tag{3.2}$$

- Si $q<1$, soit $r$ tel que $q<r<1$ : alors
$$\lim_{x\to0,x>0}x^r\frac{|\mathrm{Ln}\,x|^p}{x^q}=0,$$
donc l'intégrale (3.2) est convergente.

- Si $q = 1$, l'intégrale (3.2) converge si et seulement si $-p > 1$, soit $p < -1$.
- Si $q > 1$, soit $r$ tel que $1 < r < q$ : alors
$$\lim_{x\to 0, x>0} x^r \frac{|\operatorname{Ln} x|^p}{x^q} = +\infty,$$
donc l'intégrale (3.2) est divergente.

(2) Soit $a > 1$ ; on examine la convergence de l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{(\operatorname{Ln} x)^p}{x^q} dx. \tag{3.3}$$

- Si $q > 1$, soit $r$ tel que $1 < r < q$ : alors
$$\lim_{x\to +\infty} x^r \frac{(\operatorname{Ln} x)^p}{x^q} = 0,$$
donc l'intégrale (3.3) est convergente.
- Si $q = 1$, l'intégrale (3.3) converge si et seulement si $-p > 1$, soit $p < -1$.
- Si $q < 1$, soit $r$ tel que $q < r < 1$ : alors
$$\lim_{x\to +\infty} x^r \frac{(\operatorname{Ln} x)^p}{x^q} = +\infty,$$
donc l'intégrale (3.3) est divergente.

**Proposition 3.22.** *Soit $f$ une fonction localement intégrable sur $[a, \beta[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $g$ une fonction localement intégrable sur $[a, \beta[$, à valeurs positives ou nulles, dont l'intégrale sur $[a, \beta[$ est convergente.*

(1) *Si $f(x) = O(g(x))$ au voisinage de $\beta$, alors l'intégrale de $f$ sur $[a, \beta[$ est absolument convergente et*
$$\int_x^\beta f(t)dt = O\Big(\int_x^\beta g(t)dt\Big), \quad \textit{au voisinage de } \beta.$$

(2) *Si $f(x) = o(g(x))$ au voisinage de $\beta$, alors l'intégrale de $f$ sur $[a, \beta[$ est absolument convergente et*
$$\int_x^\beta f(t)dt = o\Big(\int_x^\beta g(t)dt\Big), \quad \textit{au voisinage de } \beta.$$

Démonstration. (1) Dans le premier cas, il existe $c \in [a, \beta[$ et $k > 0$ tels que
$$\forall x \in [c, \beta[ \quad |f(x)| \le k g(x),$$
donc l'intégrale de $f$ sur $[a, \beta[$ est absolument convergente. Par ailleurs, pour tous les $x, y \in [c, \beta[$, avec $x < y$
$$\Big| \int_x^y f(t)dt \Big| \le \int_x^y |f(t)|dt \le k \int_x^y g(t)dt.$$
En faisant $y \to \beta$ (toutes les intégrales sont convergentes), on obtient le résultat.

(2) Dans le second cas, soit $\varepsilon > 0$ : il existe $c \in [a, \beta[$ tel que
$$\forall x \in [c, \beta[ \quad |f(x)| \le \varepsilon g(x),$$

donc l'intégrale de $f$ sur $[a,\beta[$ est absolument convergente. Par ailleurs, pour tous les $x,y \in [c,\beta[$, avec $x<y$

$$\left|\int_x^y f(t)dt\right| \leq \int_x^y |f(t)|dt \leq \varepsilon \int_x^y g(t)dt.$$

En faisant $y \to \beta$ (toutes les intégrales sont convergentes), on obtient le résultat. □

**Proposition 3.23.** *Soit $f$ une fonction localement intégrable sur $[a,\beta[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $g$ une fonction localement intégrable sur $[a,\beta[$, à valeurs positives ou nulles, dont l'intégrale sur $[a,\beta[$ est divergente.*

(1) *Si $f(x) = O(g(x))$ au voisinage de $\beta$, alors*

$$\int_a^x f(t)dt = O\left(\int_a^x g(t)dt\right), \quad \text{au voisinage de } \beta.$$

(2) *Si $f(x) = o(g(x))$ au voisinage de $\beta$, alors*

$$\int_a^x f(t)dt = o\left(\int_a^x g(t)dt\right), \quad \text{au voisinage de } \beta.$$

DÉMONSTRATION. (1) Dans le premier cas, il existe $c \in [a,\beta[$ et $k>0$ tels que

$$\forall x \in [c,\beta[ \quad |f(x)| \leq kg(x),$$

donc, pour tout $x \in [c,\beta[$,

$$\left|\int_c^x f(t)dt\right| \leq \int_c^x |f(t)|dt \leq k\int_c^x g(t)dt \leq k\int_a^x g(t)dt.$$

Comme l'intégrale de $g$ (à valeurs positives ou nulles) sur $[a,\beta[$ est divergente, on a

$$\lim_{x\to\beta} \int_a^x g(t)dt = +\infty,$$

donc, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $d \in [a,\beta[$ tel que

$$\forall x \geq d \quad \frac{1}{\varepsilon}\left|\int_a^c f(t)dt\right| \leq \int_a^x g(t)dt.$$

Alors, pour tout $x \geq \max(c,d)$, on a

$$\left|\int_a^x f(t)dt\right| \leq \left|\int_a^c f(t)dt\right| + \left|\int_c^x f(t)dt\right| \leq (k+\varepsilon)\int_a^x g(t)dt,$$

qui est le résultat.

(2) Dans le second cas, soit $\varepsilon>0$ : il existe $c \in [a,\beta[$ tel que

$$\forall x \in [c,\beta[ \quad |f(x)| \leq \varepsilon g(x),$$

donc, pour tout $x \in [c,\beta[$,

$$\left|\int_c^x f(t)dt\right| \leq \int_c^x |f(t)|dt \leq \varepsilon\int_c^x g(t)dt \leq \varepsilon\int_a^x g(t)dt.$$

Comme l'intégrale de $g$ (à valeurs positives ou nulles) sur $[a,\beta[$ est divergente, on a

$$\lim_{x\to\beta} \int_a^x g(t)dt = +\infty,$$

donc il existe $d \in [a,\beta[$ tel que

$$\forall x \geq d \quad \frac{1}{\varepsilon}\left|\int_a^c f(t)dt\right| \leq \int_a^x g(t)dt.$$

Alors, pour tout $x \geq \max(c, d)$, on a

$$\left|\int_a^x f(t)dt\right| \leq \left|\int_a^c f(t)dt\right| + \left|\int_c^x f(t)dt\right| \leq 2\varepsilon \int_a^x g(t)dt,$$

qui est le résultat. □

**Proposition 3.24.** *Soient $f, g$ deux fonctions localement intégrables sur $[a, \beta[$, à valeurs positives ou nulles, telles que $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de $\beta$.*

(1) *Si l'intégrale de $f$ sur $[a, \beta[$ est convergente, alors l'intégrale de $g$ sur $[a, \beta[$ est convergente et*

$$\int_x^\beta f(t)dt \sim \int_x^\beta g(t)dt, \quad \textit{au voisinage de } \beta.$$

(2) *Si l'intégrale de $f$ sur $[a, \beta[$ est divergente, alors l'intégrale de $g$ sur $[a, \beta[$ est divergente et*

$$\int_a^x f(t)dt \sim \int_a^x g(t)dt, \quad \textit{au voisinage de } \beta.$$

Démonstration. Cela résulte des propositions 3.22 et 3.23 car $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de $\beta$ si et seulement si $g(x) - f(x) = o(f(x))$ au voisinage de $\beta$. □

**Exemple 3.16.** On a

$$\mathrm{e}^{x^2} \sim \mathrm{e}^{x^2} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2}, \quad \text{au voisinage de } +\infty.$$

La fonction $\mathrm{e}^{x^2}$ est continue positive, et son intégrale sur $[1, +\infty[$ diverge, donc

$$\int_1^x \mathrm{e}^{t^2} dt \sim \int_1^x \Big(\mathrm{e}^{t^2} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\Big)dt = \frac{1}{2}\Big[\frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t}\Big]_1^x = \frac{1}{2}\Big(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x} - \mathrm{e}\Big) \sim \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x},$$

au voisinage de $+\infty$.

On rappelle la proposition 1.22.

**Proposition 3.25** (Première formule de la moyenne)**.** *Soient $f, g$ deux fonctions définies sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. On suppose que $f$ est continue et que $g$ est de signe constant et intégrable. Alors*

$$\exists c \in [a, b] \qquad \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

**Proposition 3.26** (Deuxième formule de la moyenne)**.** *Soient $f, g$ deux fonctions définies sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. On suppose que $f$ est à valeurs positives ou nulles, décroissante et que $g$ est intégrable. Alors*

$$\exists c \in [a, b] \qquad \int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{x \to a, x > a} f(x)\int_a^c g(x)dx.$$

Démonstration. La fonction $f$ est monotone, donc intégrable, la fonction $g$ est intégrable, donc la fonction $fg$ est intégrable. On note $\ell := \lim_{x \to a, x > a} f(x)$. La fonction

$$G : x \in [a, b] \to \int_a^x g(t)dt$$

est continue. Soient

$$m := \min_{x\in[a,b]} G(x) \quad \text{et} \quad M := \max_{x\in[a,b]} G(x).$$

Comme la fonction $f$ est à valeurs positives ou nulles, il suffit de démontrer

$$m\ell \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\ell. \tag{3.4}$$

• On suppose d'abord que $f$ est une fonction en escalier. Soit alors $\sigma := \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ une subdivision adaptée à $f$. On note $f_{i-1/2}$ la valeur de $f$ sur l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$. On a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= \sum_{i=1}^{n} f_{i-1/2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f_{i-1/2}\big(G(x_i) - G(x_{i-1})\big)\\ &= \sum_{i=1}^{n-1}(f_{i-1/2} - f_{i+1/2})G(x_i) + f_{n-1/2}G(x_n),\end{aligned}$$

car $G(x_0) = 0$. On en déduit

$$\begin{aligned}mf_{1/2} = m\Big(\sum_{i=1}^{n-1}(f_{i-1/2} - f_{i+1/2}) + f_{n-1/2}\Big) \leq \\ \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\Big(\sum_{i=1}^{n-1}(f_{i-1/2} - f_{i+1/2}) + f_{n-1/2}\Big) = Mf_{1/2}.\end{aligned}$$

Comme $\ell = f_{1/2}$, on obtient l'encadrement (3.4).

• Dans le cas général, pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\sigma := \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ la subdivision uniforme de $[a, b]$ de pas $(b - a)/n$ et $\varphi_n$ la fonction en escalier définie par

$$\begin{aligned}&\forall i \in \{1, 2, \ldots n\}\ \forall x \in ]x_{i-1}, x_i[ \quad \varphi_n(x) := f(x_i),\\ &\forall i \in \{0, 1, \ldots n\} \quad \varphi_n(x_i) := f(x_i).\end{aligned}$$

Alors

$$\forall x \in [a, b] \quad \varphi_n(x) \leq f(x).$$

En notant $K := \max_{x\in[a,b]} |g(x)|$,

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b f(x)g(x)dx - \int_a^b \varphi_n(x)g(x)dx\Big| &\leq \int_a^b \big(f(x) - \varphi_n(x)\big)|g(x)|dx\\ &\leq K\int_a^b \big(f(x) - \varphi_n(x)\big)dx \leq K\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(f(x_{i-1}) - f(x_i)\big)dx\\ &\leq K\frac{b-a}{n}\big(f(a) - f(b)\big).\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n$ est une fonction en escalier, à valeurs positives ou nulles, décroissante. Donc

$$m\ell_n \leq \int_a^b \varphi_n(x)g(x)dx \leq M\ell_n.$$

où
$$\ell_n := f\Big(a + \frac{b-a}{n}\Big).$$
On obtient l'encadrement (3.4) en faisant $n \to \infty$. $\square$

**Proposition 3.27** (Règle d'Abel)**.** *Soient $f, g$ deux fonctions définies sur un intervalle $[a, +\infty[$ de $\mathbb{R}$. On suppose que $f$ est à valeurs positives ou nulles, décroissante, tend vers $0$ à l'infini et que $g$ est à valeurs réelles ou complexes, localement intégrable, telle que la fonction*
$$G : x \in [a, +\infty[ \to \int_a^x g(t)dt$$
*soit bornée. Alors l'intégrale de $fg$ sur $[a, +\infty[$ est convergente.*

Démonstration. La fonction $f$, décroissante, est localement intégrable, donc la fonction $fg$ est localement intégrable. Comme
$$\forall x \in [a, +\infty[ \quad \operatorname{Re} G(x) = \int_a^x \operatorname{Re} g(t)dt \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} G(x) = \int_a^x \operatorname{Im} g(t)dt,$$
si $G$ est bornée, $\operatorname{Re} G$ et $\operatorname{Im} G$ sont bornées ; et si l'intégrale de $f\operatorname{Re} g$ sur $[a, +\infty[$ est convergente et l'intégrale de $f\operatorname{Im} g$ sur $[a, +\infty[$ est convergente, alors l'intégrale de $fg$ sur $[a, +\infty[$ est convergente. Par conséquent, on peut supposer $g$ à valeurs réelles (on fait la démonstration avec $\operatorname{Re} g$ et avec $\operatorname{Im} g$). Soit $K > 0$ tel que
$$\forall x \geq a \quad \Big|\int_a^x g(t)dt\Big| \leq K.$$

Soient $x, y \in [a, +\infty[$ avec $x < y$. D'après la deuxième formule de la moyenne (Proposition 3.26), il existe $z \in [x, y]$ tel que
$$\int_x^y f(t)g(t)dt = \lim_{t\to x, t>x} f(t) \int_x^z g(t)dt = \lim_{t\to x, t>x} f(t)\Big(\int_a^z g(t)dt - \int_a^x g(t)dt\Big).$$
Donc
$$\Big|\int_x^y f(t)g(t)dt\Big| \leq 2K \lim_{t\to x, t>x} f(t).$$
Soit $\varepsilon > 0$ : comme $f$ tend vers $0$ à l'infini, il existe $c > a$ tel que
$$\forall t \geq c \quad f(t) \leq \frac{\varepsilon}{2K}.$$
Alors
$$\forall x, y \geq c \quad \Big|\int_x^y f(t)g(t)dt\Big| \leq \varepsilon.$$
Comme $\varepsilon$ est quelconque, on obtient la conclusion en utilisant la Proposition 3.17. $\square$

**Corollaire.** *Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $[a, +\infty[$ de $\mathbb{R}$ ; on suppose que $f$ est à valeurs positives ou nulles, décroissante et tend vers $0$ à l'infini. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, l'intégrale de $f(x)e^{\imath\lambda x}$ sur $[a, +\infty[$ est convergente.*

Démonstration. À $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on associe la fonction
$$g_\lambda : x \in [a, +\infty[ \to e^{\imath\lambda x}.$$

Elle est continue ; comme elle vérifie

$$\forall x \geq a \quad \left|\int_a^x g_\lambda(t)dt\right| = \left|\int_a^x \mathrm{e}^{\imath\lambda t}dt\right| = \frac{1}{|\lambda|}\left|\mathrm{e}^{\imath\lambda x} - \mathrm{e}^{\imath\lambda a}\right| \leq \frac{2}{|\lambda|},$$

le résultat est une conséquence de la règle d'Abel (Proposition 3.27). □

**Remarque 3.8.** Sous les hypothèses du Corollaire, on a également : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, l'intégrale de $f(x)\cos(\lambda x)$ et l'intégrale de $f(x)\sin(\lambda x)$ sur $[a, +\infty[$ sont convergentes.

**Exemple 3.17.** On peut définir les fonctions suivantes.

– *Cosinus intégral* par

$$\mathrm{Ci}\,(x) := -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt, \quad x > 0.$$

– *Sinus intégral* par

$$\mathrm{Si}\,(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad x > 0.$$

La fonction $\mathrm{Ci}\,(x)$ tend vers $-\infty$ quand $x \to 0$. La fonction $\mathrm{Si}\,(x)$ a une limite finie quand $x \to +\infty$. Par ailleurs, pour $n \geq 1$,

– on a

$$\int_{(n-1/2)\pi}^{(n+1/2)\pi} \left|\frac{\cos t}{t}\right| dt \geq \frac{1}{(n+1/2)\pi} \int_{(n-1/2)\pi}^{(n+1/2)\pi} |\cos t| dt = \frac{1}{(n+1/2)\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t dt$$
$$\geq \frac{2}{(n+1/2)\pi} \geq \frac{2}{(n+1)\pi},$$

donc, si $p < q$ sont des entiers

$$\int_{(p-1/2)\pi}^{(q-1/2)\pi} \left|\frac{\cos t}{t}\right| dt \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{n};$$

ce qui montre que l'intégrale de la fonction $t \to \dfrac{\cos t}{t}$ sur $[x, +\infty[$ n'est pas absolument convergente (ici $x > 0$) ;

– on a

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi \sin t dt$$
$$\geq \frac{2}{(n+1)\pi},$$

donc, si $p < q$ sont des entiers

$$\int_{p\pi}^{q\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{n};$$

ce qui montre que l'intégrale de la fonction $x \to \dfrac{\sin x}{x}$ sur $[0, +\infty[$ n'est pas absolument convergente.

**Proposition 3.28.** *Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $[a,\beta[$ de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes, localement intégrable. L'intégrale de $f(x)$ sur $[a,\beta[$ est convergente si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ qui tend vers $\beta$, la série $(\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt)$ converge.*

Démonstration. Cela résulte de la Proposition 3.16. □

**Proposition 3.29.** *Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $[a,\beta[$ de $\mathbb{R}$, à valeurs positives ou nulles, localement intégrable. S'il existe une suite $(x_n)_n \subset [a,\beta[$ croissante qui tend vers $\beta$, telle que la série $(\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt)$ converge, alors l'intégrale de $f(x)$ sur $[a,\beta[$ est convergente.*

Démonstration. Il suffit de démontrer qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall x \geq a \quad \int_a^x f(t)dt \leq M.$$

Or

$$\begin{aligned}\forall x \geq a \quad \int_a^x f(t)dt &\leq \int_a^{x_1} f(t)dt + \int_{x_1}^{\max(x,x_1)} f(t)dt \\ &\leq \int_a^{x_1} f(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt.\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

**Proposition 3.30.** *Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $[a,+\infty[$ de $\mathbb{R}$, à valeurs positives ou nulles, localement intégrable et décroissante. L'intégrale de $f(x)$ sur $[a,+\infty[$ est convergente si et seulement si la série $(\sum f(n))$ $(n \geq a)$ converge.*

Démonstration. • Si l'intégrale de $f(x)$ sur $[a,+\infty[$ est convergente, la série $(\sum \int_n^{n+1} f(t)dt)$ $(n \geq a)$ converge, d'après la Proposition 3.28. Comme

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt,$$

la série $(\sum f(n))$ $(n \geq a)$ converge.

• Si la série $(\sum f(n))$ $(n \geq a)$ converge, comme

$$\int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n),$$

la série $(\sum \int_n^{n+1} f(t)dt)$ $(n \geq a)$ converge. Donc l'intégrale de $f(x)$ sur $[a,+\infty[$ est convergente, d'après la Proposition 3.29. □

**Remarque 3.9.** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $[a,+\infty[$ de $\mathbb{R}$, à valeurs positives ou nulles, localement intégrable et décroissante. Si l'intégrale de $f(x)$ sur $[a,+\infty[$ est convergente, alors $f$ tend vers 0 à l'infini.

Soit

$$g := \sum_{n=1}^{\infty} n 1_{[n,n+1/n^3[}$$

L'intégrale de $g(x)$ sur $[0,+\infty[$ est convergente, mais $g$ ne tend pas vers 0 à l'infini.

**Théorème 3.2** (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions localement intégrables sur un intervalle $[a,\beta[\subset \mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes, telles que les intégrales de $|f|^2$ et de $|g|^2$ sur $[a,\beta[$ convergent. Alors l'intégrale de $fg$ sur $[a,\beta[$ est absolument convergente et*

$$\left|\int_a^\beta f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^\beta |f(x)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_a^\beta |g(x)|^2dx\right)^{1/2}.$$

Démonstration. La fonction $fg$ est localement intégrable sur $[a,\beta[$. Pour tout $x\in[a,\beta[$, on a

$$\int_a^x |f(t)|\,|g(t)|dt \leq \left(\int_a^x |f(t)|^2dt\right)^{1/2}\left(\int_a^x |g(t)|^2dt\right)^{1/2}.$$

Donc l'intégrale de $fg$ sur $[a,\beta[$ est absolument convergente. On a aussi, pour tout $x\in[a,\beta[$,

$$\left|\int_a^x f(t)g(t)dt\right| \leq \left(\int_a^x |f(t)|^2dt\right)^{1/2}\left(\int_a^x |g(t)|^2dt\right)^{1/2}.$$

On obtient le résultat annoncé en faisant $x\to\beta$. □

**Remarque 3.10.** (1) Soit $[a,b[$ un intervalle borné. Soit $f$ une fonction localement intégrable sur $[a,b[$, à valeurs réelles ou complexes, telle que l'intégrale de $|f|^2$ sur $[a,b[$ converge. Alors l'intégrale de $f$ sur $[a,b[$ est absolument convergente et

$$\int_a^b |f(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b 1^2dx\right)^{1/2} = \sqrt{b-a}\left(\int_a^b |f(x)|^2dx\right)^{1/2}.$$

(2) La fonction

$$f_2 : x\in[0,1[\to \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

a une intégrale convergente ; mais l'intégrale de $|f_2|^2$ sur $[0,1[$ diverge.

(3) La fonction

$$f_3 : x\in[1,+\infty[\to \frac{1}{x}$$

a une intégrale divergente ; mais l'intégrale de $|f_3|^2$ sur $[1,+\infty[$ converge.

(4) La fonction

$$f_4 : x\in[0,+\infty[\to \sum_{n=1}^{\infty} n1_{[n,n+1/n^3[}$$

a une intégrale convergente ; mais l'intégrale de $|f_4|^2$ sur $[0,+\infty[$ diverge.

**Théorème 3.3** (Inégalité de Minkowski)**.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions localement intégrables sur un intervalle $[a,\beta[\subset\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes, telles que les intégrales de $|f|^2$ et de $|g|^2$ sur $[a,\beta[$ convergent. Alors l'intégrale de $|f+g|^2$ sur $[a,\beta[$ est convergente et*

$$\left(\int_a^\beta |f(x)+g(x)|^2dx\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^\beta |f(x)|^2dx\right)^{1/2} + \left(\int_a^\beta |g(x)|^2dx\right)^{1/2}.$$

Démonstration. Pour tout $x \in [a, \beta[$, on a

$$\left(\int_a^x |f(t)+g(t)|^2 dt\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^x |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} + \left(\int_a^x |g(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

On obtient le résultat annoncé en faisant $x \to \beta$. $\square$

ANNEXE A

# Formulaire

## 1. Fonctions trigonométriques

Si $x, y$ sont des réels, alors

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y, \\
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\
\sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos x \cos y &= \frac{1}{2}\big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\big), \\
\sin x \sin y &= \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big), \\
\sin x \cos y &= \frac{1}{2}\big(\sin(x+y) + \sin(x-y)\big).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos x + \cos y &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right), \\
\cos x - \cos y &= -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right), \\
\sin x + \sin y &= 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right), \\
\sin x - \sin y &= 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right).
\end{aligned}$$

## 2. Primitives des fonctions usuelles

Elles sont données dans des intervalles où la fonction intégrée est continue. $C$ est une constante quelconque.

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, \quad \underline{a \in \mathbb{R},\ a \neq -1}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \mathrm{Ln}\,|x| + C$$

$$\int \mathrm{e}^{ax} dx = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} + C, \quad \underline{a \in \mathbb{C},\ a \neq 0}$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\mathrm{Ln}\,a} a^x + C, \quad \underline{a > 0,\ a \neq 1}$$

$$\int \mathrm{Ln}\,|x| dx = x\mathrm{Ln}\,|x| - x$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \mathrm{tg}\, x dx = -\mathrm{Ln}\,|\cos x| + C$$

$$\int \mathrm{cotg}\, x dx = \mathrm{Ln}\,|\sin x| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg}\, x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{cotg}\, x + C$$

$$\int \mathrm{ch}\, x dx = \mathrm{sh}\, x + C$$

$$\int \mathrm{sh}\, x dx = \mathrm{ch}\, x + C$$

$$\int \mathrm{th}\, x dx = \mathrm{Ln}\,\mathrm{ch}\, x + C$$

$$\int \coth x dx = \mathrm{Ln}\,|\mathrm{sh}\, x| + C$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} dx = \mathrm{th}\, x + C$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x} dx = -\coth x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{Arc\,tg}\, x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = -\mathrm{Arc\,cotg}\, x + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \begin{cases} \mathrm{Arg\,th}\, x + C & \text{si } |x| < 1 \\ \mathrm{Arg\,coth}\, x + C & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \mathrm{Arc\,sin}\, x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\mathrm{Arc\,cos}\, x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \mathrm{Ln}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \mathrm{Arg\,sh}\, x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \begin{cases} \mathrm{Arg\,ch}\, x + C & \text{si } x > 1 \\ -\mathrm{Arg\,ch}\,(-x) + C & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \mathrm{Ln}\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$$

# Table des matières