MATH421 année 2016-2017 - Devoir 1

La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la rigueur de l'expression.

Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(x) = 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x \notin \mathbb{Q}, \\ g(x) = \dfrac{1}{q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q}, \text{ avec } p, q \in \mathbb{N} \text{ et } p \wedge q = 1. \end{cases}$$

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x = 0, \\ f(x) = 1 & \text{si } x \in]0,1]. \end{cases}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $R_n := \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0,1]; p, q \in \mathbb{N}, p \wedge q = 1 \text{ et } q \leq n\}$. On note $r_n := \text{card}(R_n)$. Donner un majorant de r_n en fonction de n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et σ_n une subdivision de $[0,1]$ contenant R_n. Montrer que si I est un intervalle ouvert dont les extrémités sont deux points consécutifs de σ_n, pour tout $x \in I$, $0 \leq g(x) \leq \frac{1}{n}$.

3. Construire une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[0,1]$ telle que

$$\forall x \in [0,1], \ |g(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{1}{n}$$

4. Montrer que g est Riemann-intégrable et calculer son intégrale.

5. Montrer que f est Riemann-intégrable.

6. Est-il vrai que la composée de deux fonctions Riemann-intégrables est Riemann-intégrable ?