MATH421 - Examen du 17 mai 2016

La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la rigueur de l'expression.

(1 pt) **Questions de cours 1.** Étant donnée une fonction $f :]0,1] \to \mathbb{R}$, quand dit-on que l'intégrale $\int_0^1 f$ converge ?

(4 pts) **Questions de cours 2.** Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée (c'est-à-dire qu'existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]0,1],\ |f(x)| \leq M$) et localement intégrable.

a. Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction Riemann-intégrable $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$.

b. Montrer ensuite que l'intégrale généralisée $\int_0^1 f$ est l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \tilde{f}$.

Exercice 1. Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}e^{-x}}{\sqrt[4]{x - \sin(x)}}$.

(2 pts) **1.a.** L'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ est-elle convergente ?

(1 pt) **1.b.** On note $g_\alpha : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g_\alpha(x) = x^\alpha e^{-x}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'existe $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f \sim_{+\infty} -g'_{\alpha_0}$.

(2 pts) **1.c.** En déduire un équivalent, pour x au voisinage de $+\infty$, de la fonction $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$.

Exercice 2. Soit $f : [0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

(2 pts) **2.a.** Calculer $\int_0^y f$, pour tout $y \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

(2 pts) **2.b.** L'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f$ est-elle convergente ?

Exercice 3. Soit $f : [1, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \log(\tan x)$.

(2 pts) **3.a.** L'intégrale $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f$ est-elle convergente ?

(2 pts) **3.b.** Si la réponse à la question précédente est positive, donner un équivalent en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction $x \mapsto \int_x^{\frac{\pi}{2}} f$. Si la réponse à la question précédente est négative, donner un équivalent en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction $x \mapsto \int_1^x f$

(6 pts) **Exercice 4.** Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+, \beta \neq 0$. Pour quelles valeurs de α et β l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^\alpha \sin(t^\beta)$ converge-t-elle ?