Agrégation de Mathématiques **2012-2013**
CMI **Université d'Aix-Marseille**

Intégrale de Riemann.

1. Intégrale de Riemann des fonctions réglées.

On définit les fonctions en escalier, les intégrales de fonctions en escalier, les fonctions réglées comme limites uniformes de fonctions en escalier, et on définit les intégrales de fonctions réglées par densité.

Subdivision d'un intervalle. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On appelle *subdivision de l'intervalle* $[a,b]$ toute suite finie strictement croissante $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$.

Pas d'une subdivision. On appelle *pas de la subdivision* $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ le plus grand des nombres $x_i - x_{i-1}$ où $i \in \{1, \ldots, n\}$ que l'on note $\delta(\sigma)$ ou parfois $|\sigma|$.

Fonction en escalier. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. On dit que f est *en escalier* s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a,b]$ telle que f soit constante sur $]x_{i-1}, x_i[$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Une telle subdivision σ est dite alors *bien adaptée à* f.

Intégrale des fonctions en escalier. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction en escalier, $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision bien adaptée à f, $c_i \in \mathbb{C}$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $f \equiv c_i$ sur $]x_{i-1}, x_i[$. La valeur

$$I(\sigma, f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) c_i$$

est indépendante de la subdivision σ bien adaptée à f. On la note

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Preuve du fait que l'intégrale est indépendante de la subdivision adaptée. On prend deux subdvisions $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ et $\sigma' = (x'_i)_{0 \leq i \leq n'}$ adaptées à f. On considère la subdivision $\tau =$

$(y_i)_{0\leq i\leq n}$ obtenue en prenant la réunion de σ et σ' et en réordonnant les points. Si on prouve que $I(\sigma,f)=I(\tau,f)$, alors par analogie on aura $I(\sigma',f)=I(\tau,f)$ et donc $I(\sigma,f)=I(\sigma',f)$. Montrons donc que $I(\sigma,f)=I(\tau,f)$. Pour cela, on isole les points de τ qui sont dans σ en écrivant que $(x_i)_{0\leq i\leq n}=(y_{k_i})_{0\leq i\leq n}$ et on écrit que, pour $c_i\in]y_{i-1},y_i[$, $i=1,\ldots,m$

$$I(\tau,f)=\sum_{i=1}^{m}(y_i-y_{i-1})f(c_i)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\ell=k_{i-1}+1}^{k_i}(y_\ell-y_{\ell-1})f(c_\ell)\right).$$

Comme la subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq n}=(y_{k_i})_{0\leq i\leq n}$ est bien adaptée à f, on en déduit que, pour $0\leq i\leq n$, $f(c_{k_{i-1}+1})=\cdots=f(c_{k_i})$, et donc, pour $d_i\in]x_{i-1},x_i[$, $i=1,\ldots,n$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\ell=k_{i-1}+1}^{k_i}(y_\ell-y_{\ell-1})f(c_\ell)\right)=\sum_{i=1}^{n}(y_{k_i}-y_{k_{i-1}})f(d_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})f(d_i)=I(\sigma,f).\ \square$$

Propriétés. *L'intégrale est linéaire, c'est-à-dire que, pour $f,g:[a,b]\to\mathbb{C}$ en escalier et $\lambda\in\mathbb{C}$, on a*

$$\int_a^b(f(x)+\lambda g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\lambda\int_a^b g(x)dx.$$

On a la relation de Chasles, c'est à dire que, pour $c\in[a,b]$,

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

Fonctions réglées. $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ est dite *réglée* si et seulement si elle est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

Proposition (par exemple, [Go], p. 95-96).

- *Une fonction réglée sur $[a,b]$ est bornée.*
- *Une fonction continue sur $[a,b]$ est réglée.*

Preuve. Toute fonction en escalier est bornée car elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Si f est réglée, il existe φ en escalier telle que, pour tout $x\in[a,b]$, $|f(x)-\varphi(x)|\leq 1$, et donc $|f(x)|\leq|\varphi(x)|+1$, ce qui prouve que f est bornée.

Si f est continue sur $[a,b]$, f est uniformément continue, et donc, si on prend $\varepsilon>0$, il existe $\alpha>0$ tel que, pour tous $x,y\in[a,b]$, $|x-y|\leq\alpha$ implique $|f(x)-f(y)|\leq\varepsilon$. On prend $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{n}\leq\alpha$ et on construit la fonction φ en escalier de la manière suivante. On considère la subdvision $(x_i)_{0\le i\le n} = \big(a + \frac{b-a}{n} i\big)_{0\le i\le n}$ et on pose $\varphi_{|[x_0,x_1[} \equiv f(x_0), \ldots, \varphi_{|[x_{n-2},x_{n-1}[} \equiv f(x_{n-2})$, $\varphi_{|[x_{n-1},x_n]} \equiv f(x_{n-1})$. Il est alors clair que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \le \varepsilon.$$

En effet, si $x \in [a, b]$ alors ou bien $x \in [x_{i-1}, x_i[$ pour un $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, ou bien $x \in [x_{n-1}, x_n]$. Dans le premier cas, on a alors

$$|f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - f(x_{i-1})| \le \varepsilon$$

car $|x - x_{i-1}| \le (x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \le \alpha$. Le second cas est analogue. □

Caractérisation des fonctions réglées (par exemple, [Go], p.96, [Po], p.51-52, 82-83). $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *est réglée si et seulement* f *admet une limite à gauche et à droite en tout point. L'ensemble des points de discontinuité de* f *est alors au plus dénombrable.*

Preuve. Pour prouver que si f est réglée alors elle admet une limite à gauche et à droite en tout point, il suffit de remarquer que c'est vrai pour les fonctions en escalier et de passer à la limite.

D'après le critère de Cauchy (*cf.* par exemple [Po], p.48), f admet une limite à gauche en un point x_0 de $]a, b[$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tous $x < x_0$ et $x' < x_0$, $|x - x'| \le \alpha$ implique $|f(x) - f(x')| \le \varepsilon$. Soit donc $\varepsilon > 0$. Comme f est limite uniforme de fonctions en escalier, il existe une fonction en escalier φ telle que, pour tout $x \in [a, b]$, $|f(x) - \varphi(x)| \le \frac{\varepsilon}{3}$. Comme φ admet une limite à gauche en x_0, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tous $x < x_0$ et $x' < x_0$, $|x - x'| \le \frac{\varepsilon}{3}$ implique $|\varphi(x) - \varphi(x')| \le \frac{\varepsilon}{3}$. Si maintenant $x < x_0$ et $x' < x_0$ sont tels que $|x - x'| \le \frac{\varepsilon}{3}$, on a alors

$$|f(x) - f(x')| \le |f(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - \varphi(x')| +$$

$$+ |\varphi(x') - f(x')| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ceci prouve bien que toute fonction réglée admet une limite à gauche en $x_0 \in [a, b]$. De même pour les limites à droite.

Montrons maintenant que si une fonction f admet une limite à gauche et à droite en tout point de $[a, b]$, elle est réglée. Pour cela, on utilise le fait qu'elle "varie peu" pour construire une fonction en escalier qui l'approche.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $x \in [a, b]$. Comme f admet une limite à droite et à gauche en x, il existe un nombre $\alpha_x > 0$ tel que, pour tout $y \in]x - \alpha_x, x[\cap[a, b]$, on ait $|f(y) - f(x-)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et pour tout $y \in]x, x + \alpha_x[\cap[a, b]$, on ait $|f(y) - f(x+)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Le théorème de Borel-Lebesgue nous permet de recouvrir l'intervalle $[a, b]$ par un nombre fini d'intervalles $]x_1 - \alpha_{x_1}, x_1 + \alpha_{x_1}[, \ldots,]x_p - \alpha_{x_p}, x_p + \alpha_{x_p}[$. Notons alors $(y_i)_{0 \leq i \leq n}$ la subdivision formée par les points $x_i - \alpha_{x_i}, x_i, x_i + \alpha_{x_i}$ qui sont dans $[a, b]$, a et b. Il est alors clair que tout intervalle $]a_{i-1}, a_i[$ est contenu dans l'un des $]x - \alpha_x, x[$ ou $]x, x + \alpha_x[$. On définit enfin une fonction en escalier φ par

$$\varphi(a_i) = f(a_i), i = 0, \ldots, n$$

et

$$\varphi_{|]a_{i-1}, a_i[} \equiv f\left(\frac{a_{i-1} + a_i}{2}\right).$$

Il reste à vérifier que, pour tout $y \in [a, b]$, $|\varphi(y) - f(y)| \leq \varepsilon$. Si y vaut l'un des a_i, c'est clair. Si maintenant $y \in]a_{i-1}, a_i[$, on choisit x de sorte que, ou bien $]a_{i-1}, a_i[\subset]x - \alpha_x, x[$, ou bien $]a_{i-1}, a_i[\subset]x, x + \alpha_x[$. Dans le premier cas, on a alors

$$\left|f\left(\frac{a_{i-1} + a_i}{2}\right) - f(x-)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |f(y) - f(x-)| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

ce qui implique que $|f(y) - \varphi(y)| \leq \varepsilon$. Dans le second cas, c'est identique.

Il reste à prouver que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée est au plus dénombrable. Pour cela, on utilise le fait que toute fonction réglée est limite uniforme d'une suite $(\varphi_n)_n$ de fonctions en escalier. Si $x \in [a, b]$ est tel qu'il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_x$, φ_n est continue en x, alors f est continue en x. L'ensemble des points de discontinuité de f est donc inclus dans la réunion des ensembles des points de discontinuité des φ_n. Comme l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction en escalier est fini et qu'une réunion dénombrable d'ensembles finis est au plus dénombrable, on a la conclusion. □

Corollaire. (par exemple [Po], p.82 ou [Go], p. 97.) *Toute fonction monotone est réglée.*

Preuve. En effet, toute fonction monotone admet des limites à droite et à gauche en tous points. □

Exercice 1.1. Est-ce que la fonction indicatrice de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ est réglée ?

Exercice 1.2. Un exemple de fonction réglée ayant un ensemble de points de discontinuités dénombrable : la fonction de Weierstrass (par exemple, [Po] p. 83 et [Go] p.108). On définit la fonction f sur $[0,1]$ par $f(p/q) = 1/q$ si $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et par $f(x) = 0$ sinon. Montrez que f est discontinue sur $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ et continue sur $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$.

Intégrale de Riemann des fonctions réglées. *La définition de l'intégrale de Riemann des fonctions en escalier s'étend aux fonctions réglées de manière unique de la manière suivante : Si (f_n) est une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$, alors la suite des intégrales $\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)_n$ converge vers un nombre, indépendant de la suite (f_n), que l'on note $\int_a^b f(x)dx$. On a de plus,*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq (b-a)\|f\|_\infty.$$

Preuve. En effet, la suite (f_n) est de Cauchy pour la norme de la convergence uniforme sur $[a,b]$, donc la suite

$$\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)_n$$

aussi puisque, pour une fonction en escalier φ,

$$\left|\int_a^b \varphi(x)dx\right| \leq (b-a)\|\varphi\|_\infty,$$

ce qui entraîne que

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f_m(x)dx\right| =$$

$$= \left|\int_a^b (f_n(x) - f_m(x))\, dx\right| \leq (b-a)\|f_n - f_m\|_\infty \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La limite est indépendante de la suite de (f_n) choisie. En effet, si (g_n) est une autre suite de fonctions qui converge vers f, alors $(f_n - g_n)_n$ converge uniformément vers 0, et donc

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b g_n(x)dx\right| \leq (b-a)\|f_n - g_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Enfin, pour le dernier point, on passe à la limite quand $n \to +\infty$ dans la suite d'inégalités

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx \right| \leq (b-a)\|f_n\|_\infty. \ \square$$

Remarque. La construction précédente est un cas particulier du théorème de prolongement des applications uniformément continues définies sur une partie dense. *Cf.* par exemple, [Po], p.48 et 49.

2. Fonctions Riemann-intégrables.

On introduit la notion de fonctions intégrables, notion plus générale que la notion de fonctions réglées. Pour ces fonctions, on définit l'intégrale de Riemann. Un bon traitement de ces notions se trouve dans [Go], p. 118-122.

Définition d'une fonction Riemann-intégrable. Une application $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est *Riemann-intégrable* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ et $\mu : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ telles que

$$\forall t \in [a,b], |f(t) - \varphi(t)| \leq \mu(t) \quad \text{et} \quad \int_a^b \mu(x)dx < \varepsilon.$$

Remarque.

- Lorsque f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, une définition équivalente à la précédente (et parfois plus pratique d'utilisation) est la suivante : La fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier φ et ψ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\int_a^b (\psi - \varphi)(x)dx < \varepsilon$.
- Les fonctions réglées sont Riemann intégrables.
- Toute fonction Riemann intégrable est bornée (car toute fonction en escalier est bornée).
- En particulier, la fonction qui vaut $1/\sqrt{x}$ sur $]0,1]$ et 0 en 0 n'est **pas** intégrable sur $[0,1]$ au sens de Riemann (erreur fréquente ; elle l'est par contre au sens de Riemann généralisé).

Théorème et définition. Construction de l'intégrale des fonctions Riemann-intégrables. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction Riemann-intégrable. En donnant à ε les valeurs d'une suite (ε_n) positive et tendant* *vers 0 dans la définition, on voit qu'il existe deux suites* (φ_n) *et* (μ_n) *de fonctions en escalier sur* $[a,b]$ *telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f-\varphi_n| \leq \mu_n, \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \mu_n(x)dx = 0.$$

La suite $\left(\int_a^b \varphi_n(x)dx\right)$ *est alors une suite de Cauchy, donc convergente. Sa limite ne dépend pas du choix des fonctions en escaliers* φ_n *et* μ_n*. On la note* $\int_a^b f(x)dx$*.*

Preuve. Totalement analogue à la preuve de la construction de l'intégrale des fonctions réglées. Voir [Go], p.118-119. □.

Théorème. Caractérisation des fonctions Riemann-intégrables ([Go], p.190). $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ *est Riemann-intégrable si et seulement si* f *est bornée, continue sauf sur un ensemble négligeable.*

Remarque : inutile de connaître la définition de la mesure de Lebesgue pour définir un ensemble négligeable ! Un ensemble $A\subset[a,b]$ est négligeable si et seulement si, pour tout $\varepsilon>0$, il existe une famille d'intervalles dont la réunion contient A et dont la somme des longueurs est inférieure à ε.

Exercice 2.1. Montrez qu'un sous-ensemble dénombrable de $[a,b]$ est de mesure nulle. Montrez qu'une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.

Exercice 2.2 (Exemple de fonction non Riemann-intégrable). Montrez que la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ n'est pas intégrable sur $[0,1]$.

Exercice 2.3. Un exemple de fonction non réglée, Riemann-intégrable, [Go], p. 121. Montrez que la fonction $f(x)=\sin(1/x)$ sur $]0,1]$ et qui vaut 0 en 0 est Riemann-intégrable, mais n'est pas réglée.

Preuve du théorème de caractérisation des fonctions Riemann-intégrables. On introduit, si $x_0\in[a,b]$, l'oscillation de f en x_0 définie par

$$\omega(f,x_0) = \inf_{\rho>0}\left\{\sup_{\substack{|x-x_0|<\rho\\|y-y_0|<\rho}} |f(x)-f(y)|\right\}.$$

(petits exercices : Montrer que f est continue en x_0 si et seulement si $\omega(f, x_0) = 0$. Calculer l'oscillation en 0 de la fonction de l'exercice 2.3.) Pour tout $\varepsilon > 0$, on note

$$A_\varepsilon = \{x_0 \in [a, b],\ \omega(f, x_0) \geq \varepsilon\}.$$

Montrons que l'ensemble A_ε est fermé. Il suffit de montrer que le complémentaire $B_\varepsilon = \{x_0 \in E,\ \omega(f, x_0) < \varepsilon\}$ est ouvert. Soit $x_0 \in B_\varepsilon$. On a $\omega(f, x_0) < \varepsilon$, donc il existe $\rho > 0$ tel que

$$\sup_{\substack{|x-x_0|<\rho \\ |y-y_0|<\rho}} |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Considérons maintenant $x_1 \in [a, b]$ tel que $|x_1 - x_0| < \rho$ et $r = \rho - |x_0, x_1|$. On a $]x_1 - r, x_1 + r[\cap[a, b] \subset]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\cap[a, b]$, donc

$$\omega(f, x_1) \leq \sup_{x,y \in]x_1 - r, x_1 + r[\cap[a,b]} |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

donc $x_1 \in B_\varepsilon$. Ainsi, B_ε est ouvert.

Attention ! L'application $x_0 \mapsto \omega(f, x_0)$ n'est pas forcément continue. L'exercice 2.3 fournit un exemple.

L'ensemble A_ε étant fermé dans $[a, b]$, il est donc compact.

Supposons que l'ensemble A des points où f est discontinue soit négligeable. Soit $\varepsilon > 0$. On a $A_\varepsilon \subset A$, donc l'ensemble A_ε est négligeable, et donc il existe une famille au plus dénombrable $(]a_n, b_n[)_{n \in I}$ d'intervalles ouverts telle que

$$A_\varepsilon \subset \bigcup_{n \in I}]a_n, b_n[\qquad \text{et} \qquad \sum (b_n - a_n) < \varepsilon.$$

Comme A_ε est compact, on peut supposer I fini. Autrement dit, on peut trouver une famille finie $(]a_n, b_n[)_{1 \leq n \leq p}$ recouvrant A_ε et vérifiant $\sum_{n=1}^{p}(b_n - a_n) < \varepsilon$. Le recouvrement étant fini, on peut même supposer $b_n < a_{n+1}$ pour tout n.

Sur les segments $[b_n, a_{n+1}]$, on a $\omega(f, x) < \varepsilon$. Montrons maintenant qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tous $x, y \in [b_n, a_{n+1}]$, $|x - y| < \alpha$ implique $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Supposons le contraire. Il existe alors deux suites $(x_p)_p$ et $(y_p)_p$ de $[b_n, a_{n+1}]$ telles que $|x_p - y_p| < 1/p$ et $|f(x_p) - f(y_p)| \geq \varepsilon$. Comme $[b_n, a_{n+1}]$ est compact, on peut extraire une sous-suite convergente $(x_{\theta(p)}, y_{\theta(p)})_p$ de $(x_p, y_p)_p$ qui converge vers (x, y). Nécessairement, $x = y$.

Or $\omega(f,x) < \varepsilon$. Donc, il existe $\rho > 0$ tel que, pour tous $z, z' \in [b_n, a_{n+1}]$, $|z-x| < \rho$ et $|z'-x| < \rho$ impliquent $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$. Comme $(x_{\theta(p)})_p$ et $(y_{\theta(p)})_p$ convergent vers x, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $|x_{\theta(p)} - x| < \rho$ et $|y_{\theta(p)} - x| < \rho$, ce qui entraîne que $|f(x_{\theta(p)}) - f(y_{\theta(p)})| < \varepsilon$. C'est contradictoire.

Comme il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tous x, y dans $[b_n, a_{n+1}]$, $|x-y| < \alpha$ implique $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$, on peut donc trouver une fonction φ_n en escalier sur $[b_n, a_{n+1}]$ telle que

$$\forall x \in [b_n, a_{n+1}], \qquad |\varphi_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{$*$}$$

Soient φ et $\psi : [a,b] \to \mathbb{C}$ définies par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \exists n,\ x \in]a_n, b_n[\\ \varphi_n(x) & \text{si} \quad \exists n,\ x \in [b_n, a_{n+1}] \end{cases},$$

$$\psi(x) = \begin{cases} M & \text{si} \quad \exists n,\ x \in]a_n, b_n[\\ \varepsilon & \text{si} \quad \exists n,\ x \in [b_n, a_{n+1}] \end{cases},$$

où $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Les fonctions φ et ψ sont en escaliers. On a $|f - \varphi| \leq \psi$ d'après $(*)$, et

$$\int_a^b \psi(x)dx = \sum_{n=1}^{p} \int_{a_n}^{b_n} \psi(x)dx + \sum_{n=1}^{p-1} \int_{b_n}^{a_{n+1}} \psi(x)dx \leq$$
$$\leq \sum_{n=1}^{p} M(b_n - a_n) + \sum_{n=1}^{p-1} (a_{n+1} - b_n)\varepsilon \leq M\varepsilon + \varepsilon(b-a).$$

Donc f est Riemann-intégrable.

Réciproquement, si f est Riemann-intégrable, montrons que A est négligeable. Supposons que A ne le soit pas. Comme $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_{1/n}$ (en effet, f est continue en x_0 si et seulement si $\omega(f,x_0) = 0$, soit si et seulement si, pour tout n, $\omega(f,x_0) < 1/n$, soit si et seulement si, pour tout n, $x_0 \notin A_{1/n}$, soit si et seulement si $x_0 \notin \bigcup_n A_{1/n}$), on en déduit qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A_{1/n}$ ne soit pas négligeable (car une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable). Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout recouvrement au plus dénombrable $(]a_k, b_k[)_{k\in I}$ de $A_{1/n}$,

$$\sum_{k\in I} (b_k - a_k) > \varepsilon. \tag{$**$}$$

Considérons une subdivision de $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$. L'ensemble

$$I = \{i \in \{0,1,\dots,p-1\},\ A_{1/n} \cap]x_i, x_{i+1}[\neq \emptyset\}$$

vérifie d'après $(**)$, $\sum_{i\in I}(x_{i+1}-x_i) > \varepsilon$. Ainsi, si φ est une fonction en escalier adaptée à cette subdivision, on a

$$\forall i \in I, \qquad \exists x \in]x_i, x_{i+1}[, |\varphi(x) - f(x)| \geq \frac{1}{3n}.$$

(Attention, il y a une faute dans [Go], p. 191 à ce niveau). En effet, si ce n'est pas le cas, alors pour tout $x \in]x_i, x_{i+1}[$, on a $|\varphi(x) - f(x)| \leq 1/3n$, et donc, pour $x, y \in]x_i, x_{i+1}[$, comme φ est constante sur $]x_i, x_{i+1}[$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \frac{2}{3n}$, ce qui entraîne que, pour tout $x \in]x_i, x_{i+1}[$, $\omega(f,x) \leq \frac{2}{3n} < \frac{1}{n}$, et c'est absurde.

Donc, pour toute fonction en escalier ψ adaptée à cette subdivision et vérifiant $|\varphi - f| \leq \psi$, on a

$$\forall i \in I, \forall x \in]x_i, x_{i+1}[, \psi(x) \geq \frac{1}{3n},$$

donc

$$\int_a^b \psi(x)dx \geq \sum_{i\in I} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(x)dx \geq \sum_{i\in I} \frac{x_{i+1}-x_i}{3n} > \frac{\varepsilon}{3n}.$$

Ceci montre que f n'est pas Riemann-intégrable, et termine la preuve du théorème. □

Terminons par quelques propriétés importantes des intégrales de Riemann.

Théorème de convergence uniforme des suites de fonctions intégrables (par exemple, [Go], p.120). *Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f. Alors, f est intégrable et*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$. Comme f_n est intégrable, il existe deux fonctions en escaliers φ et μ telles que $|f_n - \varphi| \leq \mu$

et $\int_a^b \mu(x)dx \leq \varepsilon$. On a donc $|f-\varphi| \leq |f-f_n|+|f_n-\varphi| \leq \varepsilon+\mu$, et comme $x \mapsto \varepsilon+\mu(x)$ est une fonction en escalier et que

$$\int_a^b (\varepsilon+\mu(x))dx \leq (b-a)\varepsilon+\varepsilon,$$

on en conclut que f est intégrable.

Pour conclure, pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_n - f\|_\infty$ pour tout $n \geq N$, et donc

$$\forall n \geq N, \left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| \leq \int_a^b \|f-f_n\|_\infty dx \leq (b-a)\varepsilon,$$

d'où le résultat. □

Remarque. Le résultat précédent est par contre faux si la convergence de la suite de fonctions n'est plus uniforme, mais simple. Si par contre la suite est uniformément bornée, le résultat est vrai (dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue), mais la limite de la suite n'est pas forcément intégrable au sens de Riemann. Par exemple, si $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ sur $[0,1]$, f est continue donc Riemann-intégrable, dérivable et sa dérivée n'est pas bornée donc non Riemann-intégrable. En particulier, si $g_n(x) = n(f(x+1/n) - f(x))$, (g_n) est une suite de fonctions Riemann-intégrables convergeant vers une fonction non Riemann-intégrable, *cf.* [Go], p.188.

Primitives des fonctions continues ([Go], p.122). *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable. Alors l'application $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ qui à x associe $\int_a^x f(t)dt$ est lipschitzienne de rapport $\|f\|_\infty$. Si de plus, f est une application continue, F est alors dérivable sur $[a,b]$ et on a $F'(t) = f(t)$ pour tout $t \in [a,b]$.*

Preuve. Pour le premier point, on utilise le fait que, pour $x, y \in [a,b]$, $x \leq y$,

$$\left|\int_a^x f(t)dt - \int_a^y f(t)dt\right| \leq \left|\int_x^y f(t)dt\right| \leq (y-x)\|f\|_\infty.$$

Pour le second point, on écrit que, pour $x \in [a,b]$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x+h \in [a,b]$,

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} [f(t)-f(x)]dt$$

f étant continue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout h tel que $|h| \leq \alpha$ et pour tout $t \in [a,b]$ tel que $|t-x| \leq |h|$, on ait $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$. En particulier, pour tout h tel que $|h| \leq \alpha$, on a

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varepsilon dt = \varepsilon.$$

Le résultat en découle. □

Corollaire. *Tout application continue $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ admet au moins une primitive F, et pour toute primitive F de f, on a $\int_a^b f(t)dt = [F]_a^b = F(b) - F(a)$.*

Preuve. En effet, si F est une primitive de f, alors $G : x \mapsto \int_a^x f(t)dt - F(x)$ est dérivable de dérivée nulle sur $[a,b]$ donc constante. On a donc $G(a) = G(b)$, ce qui nous donne le résultat énoncé dans le corollaire. □

Remarque. Attention ! Une primitive n'est pas nécessairement de la forme $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$. Par exemple, $x \in \mathbb{R} \mapsto \pi + \arctan x$ est une primitive de $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, qui n'est pas de la forme $x \in \mathbb{R} \mapsto \int_a^x \frac{dt}{1+t^2}$ étant donnée qu'elle ne s'annule en aucun point de $\mathbb{R}$.

Remarque. Une fonction intégrable au sens de Riemann n'admet pas toujours une primitive. Par exemple, la fonction définie sur $[0,1]$ et qui vaut 0 sur $[0,1/2[$ et 1 sur $[1/2,1[$. En effet, si une fonction est dérivable, la dérivée possède la propriété des valeurs intermédiaires (*cf.* [Go], p.76-77).

Intégration par parties. *Soient $u, v : [a,b] \to \mathbb{C}$ deux fonctions de classe C^1. Alors*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Preuve. Laissée en exercice (utiliser le fait que uv est une primitive de $u'v + uv'$). □

Changement de variables. *Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application continue telle que $\varphi([a,b]) \subset I$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$). Alors*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du.$$

Preuve. Laissée en exercice (considérer $t \mapsto F(\varphi(t))$ où F est une primitive de f). □

3. Sommes de Riemann et sommes de Darboux.

On introduit les sommes de Riemann et on montre que les sommes de Riemann convergent en un sens que nous préciserons vers l'intégrale pour les fonctions Riemann-intégrables. On introduit ensuite les sommes de Darboux, et on montre qu'une fonction est intégrable au sens de Darboux si et seulement si elle est Riemann-intégrable. En particulier, on obtient que les fonctions dont les sommes de Riemann convergent sont exactement les fonctions Riemann-intégrables.

Somme de Riemann. Soient $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ et $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a, b]$. On appelle somme de Riemann associée à f relativement à cette subdivision toute somme

$$S(f, \sigma, \xi) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i),$$

où, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ et $\xi = (\xi_i)_{1\leq i\leq n}$.

Fonction intégrable au sens de Riemann et sommes de Riemann. ([Go], p.123). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ Riemann-intégrable. Alors, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que, pour toute subdivision de pas inférieur à α et pour toute somme de Riemann $S(f, \sigma, \xi)$ associée à cette subdivision, on ait*

$$\left| S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \varepsilon.$$

Preuve. On le prouve d'abord pour les fonctions caractéristiques d'un segment, puis par linéarité pour les fonctions en escalier et enfin pour les fonctions Riemann-intégrables par densité.

Supposons que f soit de la forme $f = \chi_{[c,d]}v$ où $\chi_{[c,d]}$ est la fonction caractéristique d'un segment $[c, d]$ inclus dans $[a, b]$ et $v \in \mathbb{C}$. Soit $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a, b]$ avec $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Pour toute somme de Riemann associée à f relativement à cette subdivision, on a

$$S(f, \sigma, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi_i)dx,$$

donc

$$\left| S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(\xi_i) - f(x))dx \right|.$$

Parmi les intervalles $[x_{i-1}, x_i]$, il y en a au plus deux sur lesquels f ne soit pas constante. on en conclut facilement

$$\left| S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq 2\delta(\sigma)|v|,$$

d'où le résultat.

Si maintenant f est une fonction en escalier, on peut écrire f comme une somme finie de fonctions du type de celui traité précédemment, et le résultat s'obtient ensuite facilement par linéarité de l'intégrale et de l'application $f \mapsto S(f, \sigma, \xi)$.

Si maintenant f est une fonction intégrable, il existe deux fonctions en escalier φ et μ telles que $|f - \varphi| \leq \mu$ et $\int_a^b \mu(x)dx < \varepsilon$. L'étape précédente nous assure l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que, pour toute somme de Riemann associée à f relativement à toute subdvision σ dont le pas $\delta(\sigma)$ vérifie $\delta(\sigma) < \alpha$, on ait

$$\left| S(\varphi, \sigma, \xi) - \int_a^b \varphi(x)dx \right| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \left| S(\mu, \sigma, \xi) - \int_a^b \mu(x)dx \right| < \varepsilon,$$

en particulier

$$|S(\mu, \sigma, \xi)| \leq \left| S(\mu, \sigma, \xi) - \int_a^b \mu(x)dx \right| + \left| \int_a^b \mu(x)dx \right| < 2\varepsilon.$$

Ainsi, pour une telle somme de Riemann, on a

$$\begin{aligned} &\left| S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \\ &|S(f, \sigma, \xi) - S(\varphi, \sigma, \xi)| + \left| S(\varphi, \sigma, \xi) - \int_a^b \varphi(x)dx \right| \\ &\qquad + \left| \int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| \\ &\leq S(|f - \varphi|, \sigma, \xi) + \varepsilon + \int_a^b |\varphi(x) - f(x)|dx \\ &\leq S(\mu, \sigma, \xi) + \varepsilon + \int_a^b \mu(x)dx \leq 2\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon. \end{aligned}$$

D'où le théorème. □

Remarque importante. En particulier, pour une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ Riemann-intégrable, la suite

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)$$

converge vers $\int_a^b f(x)dx$.

Remarque. Attention aux fausses sommes de Riemann. Par exemple, si on prend pour f une fonction strictement positive sur $[0,1]$, qu'on considère $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ et qu'on prenne pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0 = 0$ et x_i tel que $F(x_i) = iF(1)/n$ (on partage la partie du plan limitée par le graphe de f et les droites $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$ en n domaines d'aires égales en utilisant des parallèles à Oy dont on désigne les abscisses par $0 = x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n = 1$), alors

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\displaystyle\int_0^1 ((f(x))^2dx}{\displaystyle\int_0^1 f(x)dx},$$

et ne converge pas vers $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$. En effet, on remarque que F est un C^1-difféomorphisme de $[0,1]$ sur $[0,F(1)]$. Si φ est le C^1-difféomorphisme réciproque de F de $[0,F(1)]$ sur $[0,1]$, alors $x_i = \varphi(\frac{iF(1)}{n})$ et donc $\frac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ est une somme de Riemann associée à la fonction $f\circ\varphi$ relativement à la subdvision $0 < \frac{F(1)}{n} < \cdots < \frac{F(1)}{n}i < \cdots < \frac{F(1)}{n}n = F(1)$, et donc

$$\frac{F(1)}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^{F(1)} (f\circ\varphi)(x)dx.$$

En faisant le changement de variable $u = \varphi(x)$ dans l'intégrale de droite, on obtient le résultat énoncé (voir [Ra], p.59).

Remarque. On dit parfois que si f est Riemann-intégrable, alors les sommes de Riemann adaptées à f convergent vers l'intégrale de f quand le pas de leur subdivision tend vers 0. Cette assertion est abusive car on ne peut donner un sens de limite au sens usuel au fait que les sommes de Riemann convergent quand le pas des subdivisions tend vers 0. Pour donner un sens rigoureux à cette limite, il faut utiliser la notion de système dirigé, notion totalement hors-programme au niveau de l'agrégation (le lecteur intéressé peut trouver une définition de ces notions dans [Be], p. 10 ou [Yo], p. 103-104).

Sommes de Darboux ([Go], p.124). Elles sont définies pour les fonctions à valeurs réelles et bornées. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et $\sigma = (x_i)_{0\le i\le n}$ une subdivision de $[a,b]$. On pose, pour $i \in \{1,\ldots,n\}$

$$m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \qquad \text{et} \qquad M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f$$

Les réels

$$d(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})m_i \quad \text{et} \quad D(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})M_i$$

sont appelés *sommes de Darboux inférieure et supérieure* de f pour la subdivision σ.

Proposition. *Si σ et τ sont deux subdivisions de $[a,b]$ telles que $\sigma \subset \tau$, alors $d(f,\sigma) \leq d(f,\tau) \leq D(f,\tau) \leq D(f,\sigma)$.*

Preuve. Prouvons la première inégalité. Supposons que τ contienne juste un point de plus que σ, et supposons pour simplifier que ce point supplémentaire x^* est entre les points x_0 et x_1 de σ. Si

$$m_1' = \inf_{[x_0,x^*]} f, \qquad m_1'' = \inf_{[x^*,x_1]} f, \qquad m_1 = \inf_{[x_0,x_1]} f,$$

alors $m_1' \geq m_1$ et $m_1'' \geq m_1$, et donc la somme des deux premiers termes de $d(f,\tau)$ est plus grande que le premier terme de $d(f,\sigma)$:

$$m_1'(x^* - x_0) + m_1''(x_1 - x^*) \geq m_1(x_1 - x_0).$$

Les termes restants de $d(f,\tau)$ et $d(f,\sigma)$ sont identiques, donc $d(f,\tau) \geq d(f,\sigma)$. La preuve du cas général est immédiate par récurrence sur le cardinal n de $\tau \setminus \sigma$. L'argument pour la dernière inégalité est similaire. La deuxième inégalité est triviale. $\square$

Définition. f est dite *Darboux-intégrable* si et seulement si $\sup_\sigma d(f,\sigma) = \inf_\sigma D(f,\sigma)$, les bornes inférieures et bornes supérieures étant prises sur l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$. La valeur commune est alors l'intégrale de f au sens de Darboux.

Le théorème fondamental, qui permet de faire le lien entre l'intégrale de Riemann, l'intégrale de Darboux et les sommes de Riemann est le suivant :

Théorème ([Go], p.125). *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application bornée. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i. f est Riemann-intégrable

ii. f est Darboux-intégrable

iii. Il existe $I \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall \sigma \text{ subdvision de } [a,b] \text{ avec } \delta(\sigma) < \alpha,$$

$$|I - S(f,\sigma,\xi)| \leq \varepsilon.$$

On a alors $I = \int_a^b f(x)dx = \sup_\sigma d(f,\sigma) = \inf_\sigma D(f,\sigma)$.

Preuve. On a vu (i)$\Longrightarrow$(iii) avec $I = \int_a^b f(x)dx$.

- (iii)$\Longrightarrow$(ii). Montrons que $d(f) = I$. Soit $\varepsilon > 0$ et σ une subdivision de $[a,b]$ telle que $\sup_\sigma d(f,\sigma) - \varepsilon \leq d(f,\sigma) \leq \sup_\sigma d(f,\sigma)$. En ajoutant suffisamment de points à σ, on obtient une subdivision σ' de $[a,b]$ dont le pas vérifie $\delta(\sigma') < \alpha$. On a par ailleurs $d(f,\sigma) \leq d(f,\sigma') \leq \sup_\sigma d(f,\sigma)$, donc $|d(f,\sigma') - \sup_\sigma d(f,\sigma)| \leq \varepsilon$. Ecrivons $\sigma' := a = x_0 < x_1 < \cdots < w_n = b$, et considérons pour tout i le réel $m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(t)$. Pour tout i, il existe $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tel que $|m_i - f(\xi_i)| \leq \varepsilon$. Ainsi, en posant $\xi = (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$, on a

$$|d(f,\sigma') - S(f,\sigma',\xi)| \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})|m_i - f(\xi_i)|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\varepsilon = (b-a)\varepsilon,$$

ce qui entraîne

$$|I - \sup_\sigma d(f,\sigma)| \leq |I - S(f,\sigma',\xi)| + |S(f,\sigma',\xi) - d(f,\sigma')| +$$

$$+ |d(f,\sigma') - \sup_\sigma d(f,\sigma)| \leq \varepsilon + (b-a)\varepsilon + \varepsilon = (2+b-a)\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit

$$I = \sup_\sigma d(f,\sigma).$$

On montrerait de même $I = \inf_\sigma D(f,\sigma)$, d'où (ii).

(ii)$\Longrightarrow$ (i). Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\sup\limits_\sigma d(f,\sigma) = \inf\limits_\sigma D(f,\sigma)$, il existe une subdvision $\sigma : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a,b]$ telle que $D(f,\sigma) - d(f,\sigma) < \varepsilon$ (en effet, il existe σ_1 et σ_2 telles que $D(f,\sigma_1) - d(f,\sigma_2) < \varepsilon$, et considérer $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$). Pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, on note

$$m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f, \qquad M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f,$$

puis on définit deux application φ et ψ sur $[a,b]$ par

$$\varphi(a)=m_1,\quad \psi(a)=M_1 \qquad \text{et} \qquad \forall i, \varphi_{|]x_{i-1},x_i]}\equiv m_i,\quad \psi_{|]x_{i-1},x_i]}\equiv M_i.$$

Ces deux fonctions en escalier et vérifient $\varphi\leq f\leq\psi$, soit $\left|f-\frac{\varphi+\psi}{2}\right|\leq \frac{1}{2}(\psi-\varphi)$, et cela montre que f est intégrable puisque

$$\int_a^b \frac{1}{2}(\psi(x)-\varphi(x))dx=\frac{1}{2}(D(f,\sigma)-d(f,\sigma))<\frac{\varepsilon}{2}.$$

□

Corollaire important. $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ *est Riemann-intégrable si et seulement si ses sommes de Riemann convergent quand le pas de la subdivision tend vers* 0 *(en particulier, elles convergent vers l'intégrale de f sur $[a,b]$), et si et seulement si f est bornée et l'ensemble de ses points de discontinuité est négligeable.*

Preuve. La preuve est laissée en exercice (montrez que f est Riemann intégrable si et seulement si Re f et Imf sont Riemann intégrables et utiliser la $\mathbb{C}-$linéarité de l'application qui à une fonction f associe sa somme de Riemann associée à une subdivision).

Bibliographie.

[Be] H. S. Bear, *A primer of Lebesgue Integration*, Academic Press, 1995.
[Go] X. Gourdon, *Les maths en tête, Mathématiques pour M', Analyse*, Ellipses, 1994.
[Po] A. Pommellet, *Agrégation de Mathématiques, Cours d'Analyse*, Ellipses, 1994.
[Ra] E. Ramis, *Exercices d'Analyse*, Masson, 1972
[Yo] K. Yosida,*Functional Analysis*, Springer, 1980.

Intégrale de Lebesgue

1. Mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$.

Dans ses publications à partir de 1902, Henri Lebesgue presenta une des idées qui, par la suite, devint l'une des idées les plus importantes de l'analyse. Quelques-unes de ses idées avaient déjà été anticipées par Borel et Cantor, mais c'est Lebesgue qui développa de la manière la plus approfondie la théorie connue de nos jours sous le nom de théorie de la mesure. D'un point de vue heuristique et afin d'éliminer les déficiences de l'intégrale de Riemann, son idée était non pas de faire une subdivision de l'intervalle d'intégration, comme dans le cas de l'intégrale de Riemann, mais plutôt de faire une subdivision de l'image de la fonction à intégrer.
Par exemple, si f est une fonction positive définie sur $[a, b]$ et bornée par M, alors l'aire délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des x et les droites verticales $x = a$ et $x = b$ peut être approchée de la manière suivante, distincte d'une somme de Riemann. Soit $(y_0, \dots, y_n)$ une subdivision de l'intervalle $[0, M]$, et choisissons $y_i^* \in [y_{i-1}, y_i]$. Définissons

$$E_i = \{x \in [a, b],\ y_{i-1} \leq f(x) < y_i\}.$$

Alors, si $\ell(E_i)$ est la "longueur" de E_i (qui n'est pas forcément un intervalle !), une bonne approximation de l'aire cherchée est donnée par la "somme de Lebesgue"

$$y_1^* \ell(E_1) + \cdots + y_n^* \ell(E_n).$$

A la fin, bien sûr, l'intégrale de f sur $[a, b]$ sera la limite de telles sommes quand le pas de la subdivision $y_0, \dots, y_n$ tend vers 0.
Le problème est donc le suivant : est-il possible, si E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, de lui associer une longueur $\ell(E)$ de manière raisonnable, en particulier si $[c, d]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, $\ell([c, d]) = d - c$ et si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles disjoints de $\mathbb{R}$, alors

$$\ell\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell(E_n) \ ?$$

(Remarque : comme on veut prendre des limites de sommes de Lebesgue quand le pas de la subdivision augmente, on a donc besoin de l'additivité dénombrable de la mesure, et pas seulement du fait que pour un nombre fini d'ensembles disjoints, la longueur de la réunion est la somme des longueurs).
Une réponse possible est donnée par la construction de la mesure extérieure de Lebesgue de la manière suivante.

1.1. Définition. La *mesure extérieure* de tout intervalle I (ouvert, fermé ou semi-ouvert) et ayant pour extremités $a < b$ est le nombre réel positif $b - a$. On le note $m^*(I)$
En particulier, $m^*([a, b]) = m^*([a, b[) = m^*(]a, b]) = m^*(]a, b[) = b - a$. Notez qu'il est possible d'avoir $m^*(A) = m^*(B)$ avec $A \subset B$ et $A \neq B$.

On étend la mesure extérieure à tous les ouverts de $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

1.2. Proposition. *Tout ouvert de* $\mathbb{R}$ *est réunion dénombrable disjointe d'intervalles ouverts* $]a_n, b_n[$ *pour* $n \in \mathbb{N}$*. Cette écriture est unique.*

Preuve. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur U par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $]x, y[\subset U$. On vérifie facilement que c'est une relation d'équivalence sur U et que toute classe d'équivalence est un intervalle ouvert. Comme U est la réunion disjointe des classes d'équivalences et que chaque classe d'équivalence contient au moins un rationnel, on en déduit que U est réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints. $\square$

1.3. Définition. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}$, on peut écrire $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]a_n, b_n[$ grâce à la proposition précedente. On pose alors

$$m^*(U) = \sum_{n=0}^{\infty}(b_n - a_n).$$

On étend la mesure extérieure à tous les sous-ensembles bornés de $\mathbb{R}$ de la manière naturelle suivante :

1.4. Définition. Soit $A \subset \mathbb{R}$ borné. La mesure extérieure de A est

$$m^*(A) = \inf\{m^*(U),\ U \text{ ouvert et } A \subset U\}.$$

Cette borne inférieure existe bien dans $\mathbb{R}$ car l'ensemble des $m^*(U)$ est non vide (si U est borné, il existe $]a, b[\in \mathbb{R}$ tel que $U \subset]a, b[$), minoré par 0. On laisse en exercice au lecteur le fait que si, A est un intervalle de $\mathbb{R}$ non forcément ouvert, cette nouvelle mesure extérieure coïncide avec l'ancienne définition. De plus, il découle de la définition, la proposition suivante :

1.5. Proposition. *Pour tout sous-ensemble* A *borné de* $\mathbb{R}$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* U *ouvert de* $\mathbb{R}$ *contenant* A *tel que* $m^*(U) < m^*(A) + \varepsilon$*.*

Nous obtenons l'invariance de cette mesure par translation :

1.6. Théorème. *Pour tout sous-ensemble borné* A *de* $\mathbb{R}$ *et tout* $x \in \mathbb{R}$*,* $m^*(A+x) = m^*(A)$*.*

Preuve. En effet, si V est un ouvert contenant $A + x$ de la forme $\bigcup_{n=0}^{\infty}]a'_n, b'_n[$ où la réunion est disjointe, l'ouvert $V - x = \bigcup_{n=0}^{\infty}]a'_n - x, b'_n - x[$ est un ouvert contenant A, donc

$$m^*(A) \leq \sum_{n=0}^{\infty}((b'_n - x) - (a'_n - x)) = \sum_{n=0}^{\infty}(b'_n - a'_n) = m^*(V),$$

et donc, en prenant la borne inférieure pour tous les ouverts V contenant $A + x$, on obtient

$$m^*(A) \leq m^*(A + x).$$

En utilisant le fait que cette inégalité est vraie si x est remplacé par $-x$ et A est remplacé par $A + x$, on a

$$m^*(A + x) \leq m^*((A + x) - x) = m^*(A),$$

d'où l'égalité. □

Nous avons donc obtenu, en quelque sorte, une "bonne mesure", qui permet de mesurer **tous** les ensembles bornés de $\mathbb{R}$. Malheureusement, pour cette mesure, la mesure d'une réunion dénombrable disjointe d'ensembles quelconques n'est pas forcément égale à la somme des mesures des ensembles, comme le montre le théorème suivant.

1.7. Théorème. *Il existe une suite d'ensembles A_n deux à deux disjoints, telle que*

$$m^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \neq \sum_{n=0}^{\infty} m^*(A_n).$$

Preuve. On fait un raisonnement par l'absurde. Supposons que, quelle que soit la suite d'ensembles A_n deux à deux disjoints, on ait

$$m^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} m^*(A_n)$$

(on dit alors que la mesure m^* satisfait l'hypothèse d'additivité dénombrable).
Pour $\alpha \in [0,1]$, on pose $V_\alpha = \{x \in [0,1],\ x-\alpha \in \mathbb{Q}\}$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que chaque V_α est dénombrable, et que si, pour $\alpha, \beta \in [0,1]$, on a $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$, alors $V_\alpha = V_\beta$.
En utilisant l'axiome du choix[(1)], il existe un ensemble A contenant exactement un élément de chaque ensemble disctinct V_α. En particulier, A contient un et un seul rationnel, que l'on peut choisir comme on veut. On peut donc supposer que $1/2 \in A$, ce qui implique que ni 0, ni 1 sont éléments de A, et donc que $A \subset]0,1[$.
Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, on pose $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ et on pose $A_n = \{x + q_n,\ x \in A \text{ et } x + q_n \leq 1\} \cup \{x + q_n - 1,\ x \in A \text{ et } x + q_n > 1\}$ (en fait A_n est l'ensemble $A + q_n$ modulo 1, ce que l'on notera $A_n = A \oplus q_n = \{x \oplus q_n,\ x \in A\}$; on a alors $A_n \subset [0,1]$).

Affirmation 1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m^*(A_n) = m^*(A)$.*

En effet

$$A_n = (A \cap]0, 1-q_n] + q_n) \cup (A \cap]1-q_n, 1[+ q_n - 1).$$

Les deux ensembles du membre de droite de l'égalité précédente sont des ensembles disjoints. L'hypothèse faite sur l'additivité dénombrable de la mesure m^* entraîne donc que

$$m^*(A_n) = m^*(A \cap]0, 1-q_n] + q_n) + m^*(A \cap]1-q_n, 1[+ q_n - 1).$$

L'invariance par translation de m^* (théorème 1.6) implique que

$$m^*(A_n) = m^*(A \cap]0, 1-q_n]) + m^*(A \cap]1-q_n, 1[).$$

---

(1) L'axiome du choix est l'énoncé suivant : Si $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une collection d'ensembles indexés sur l'ensemble A, alors il existe un ensemble X contenant un et un seul élément de chaque X_α, ou alors, de manière équivalente, il existe une fonction $\varphi : A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ telle que, pour tout $\alpha \in A$, $\varphi(\alpha) \in X_\alpha$. On appelle cette fonction une fonction de choix.

L'additivité dénombrable entraîne encore que

$$m^*(A_n) = m^*\left[(A\cap]0, 1 - q_n]) \cup (A\cap]1 - q_n, 1[)\right] = m^*(A). \qquad \square$$

Affirmation 2. *Pour $n \neq m$, on a $A_n \cap A_m = \emptyset$.*

En effet, si $x \in A_n \cap A_m$, il existe $x_\alpha \in V_\alpha$ tel que $x = x_\alpha \oplus q_n$ et $x_\beta \in V_\beta$ avec $V_\beta \cap V_\alpha = \emptyset$ tel que $x = x_\beta \oplus q_m$. On a alors ($x = x_\alpha + q_n$ ou $x = x_\alpha + q_n - 1$) et ($x = x_\beta + q_m$ ou $x = x_\beta + q_m - 1$), et cela entraîne, en faisant la différence que $x_\alpha - x_\beta = q_m - q_n$ ou $x_\alpha - x_\beta = q_m - q_n - 1$ ou $x_\alpha - x_\beta = q_m - q_n + 1$. Dans les trois cas, $x_\alpha - x_\beta \in \mathbb{Q}$, et cela contredit le fait que $V_\beta \cap V_\alpha = \emptyset$. $\square$

Affirmation 3. $[0, 1] = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$.

En effet, si $x \in [0, 1]$, $x \in V_x$. Par construction, il existe $a \in A$ tel que $x \in V_a$. On a alors $x - a \in \mathbb{Q}$.
Si $x - a \geq 0$, il est clair que $x - a \leq 1$, et donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x - a = q_n$, ce qui implique que $x = a + q_n = a \oplus q_n$.
Si maintenant $x - a < 0$, on a $1 + x - a$ qui est rationnel et dans $[0, 1]$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $q_n = 1 + x - a$, ce qui entraîne que $x = a + q_n - 1 = a \oplus q_n$. L'affirmation 3 est donc prouvée. $\square$

Appliquons l'additivité dénombrable à la suite (A_n), nous avons

$$1 = m^*([0, 1]) = \sum_{n=0}^{\infty} m^*(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} m^*(A),$$

ce qui est clairement impossible puisque une série dont le terme général est constant ne peut être finie que si le terme général vaut 0, auquel cas la somme est nulle. Le théorème 1.7 est donc prouvé. $\square$

Comme nous voulons conserver l'additivité dénombrable de la mesure de Lebesgue, nous allons nous restreindre à une classe de sous-ensembles de $\mathbb{R}$, que nous appellerons mesurables. La caractérisation de ces ensembles mesurables fait l'objet de la section suivante.

2. Ensembles mesurables dans $\mathbb{R}$.

2.1. Ensembles mesurables dans $[0, 1]$.

La propriété qui pose problème, est l'additivité dénombrable. Nous supposons qu'elle est vérifiée sur une classe (non vide) d'ensembles que nous appelons mesurables. Plaçons nous tout d'abord dans le cadre des sous-ensembles de $[0, 1]$. Si E est un sous-ensemble mesurable de $[0, 1]$ et E^c son complémentaire dans $[0, 1]$, une condition nécessaire est que

$$m^*(E) + m^*(E^c) = m^*([0, 1]) = 1.$$

L'objet de ce paragraphe est de montrer que cette condition nécessaire est en fait suffisante à distinguer les ensembles mesurables des non-mesurables.
Nous posons donc la définition suivante :

2.1. Définition. Un sous-ensemble E de $[0,1]$ est dit *mesurable* si

$$m^*(E) + m^*(E^c) = 1.$$

Nous commençons par montrer la sous-additivité de m^* sur l'intervalle $[0,1]$.

2.2. Théorème. *Si (A_n) est une suite d'ensembles de $[0,1]$, nous avons*

$$m^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{n} m^*(A_n)$$

Preuve. Nous commençons par prouver deux lemmes.

Lemme 1. *Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, alors $m^*(I \cup J) \leq m^*(I) + m^*(J)$ avec égalité si et seulement si I et J sont disjoints.*

Preuve. Laissée au lecteur. □

En particulier, si $I_1, \dots I_n$ est une collection finie d'intervalles de $\mathbb{R}$, nous avons

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} m^*(I_k).$$

Lemme 2. *Si $(I_n)_n$ est une suite d'intervalles de $]-1,2[$, alors*

$$m^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m^*(I_n).$$

Preuve. En effet, la réunion des intervalles est un ouvert. Il existe donc, grâce à la proposition 1.2, une suite (J_n) d'intervalles disjoints telle que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} J_n,$$

ce qui implique que

$$m^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} m^*(J_n) \leq m^*(]-1,2[) = 3.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N tel que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} m^*(J_n) \leq \varepsilon,$$

et donc

$$m^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n\right) \le \sum_{n=0}^{N} m^*(J_n) + \varepsilon.$$

Pour tout $n = 0, 1, \dots, N$, il existe $K_n =]a_n, b_n[$ tel que $\overline{K_n} \subset J_n$ et tel que

$$m^*(J_n) \le m^*(K_n) + \frac{\varepsilon}{N+1},$$

et donc

$$m^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n\right) \le \sum_{n=0}^{N} m^*(K_n) + 2\varepsilon = m^*\left(\bigcup_{n=0}^{N} K_n\right) + 2\varepsilon$$

(la dernière égalité provient du fait que les K_n sont deux à deux disjoints, car les J_n le sont). L'ensemble $\bigcup_{n=0}^{N} \overline{K_n}$ est un ensemble fermé borné, donc compact, inclus dans la réunion des J_n, donc dans la réunion des I_n. Il en existe donc un nombre fini $I_{n_1}, \dots, I_{n_r}$ qui recouvrent la réunion des K_n. D'après le lemme 1,

$$m^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n\right) \le m^*\left(\bigcup_{n=0}^{N} K_n\right) + 2\varepsilon \le \sum_{j=1}^{r} m^*(I_{n_j}) + 2\varepsilon \le \sum_{n=0}^{\infty} m^*(I_n) + 2\varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers 0, le lemme 2 en découle. □

Passons à la preuve du théorème. Si $\varepsilon > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un recouvrement de A_n par une réunion d'intervalles ouverts $(I_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints tel que

$$m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \ge \sum_{m=0}^{\infty} m^*(I_{n,m}).$$

On peut de plus supposer que tous les $I_{n,m}$ sont inclus dans $]-1, 2[$. Comme la réunion des A_n est incluse dans la réunion des intervalles qui est un ouvert, on a

$$m^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \le m^*\left(\bigcup_{n,m=0}^{\infty} I_{n,m}\right).$$

Le lemme 2 nous donne

$$m^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} m^*(I_{n,m}) \le \sum_{n=0}^{\infty}\left[m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right] \le \sum_{n=0}^{\infty} m^*(A_n) + 2\varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers 0, le théorème 2.2 en découle. □

Nous définissons la mesure intérieure d'un ensemble :

2.3. Définition. Si E est un sous-ensemble de $[0,1]$, on définit la *mesure intérieure* de E et on note $m_*(E)$ le nombre $m_*(E) = 1 - m^*(E^c)$.

Cette mesure est appelée intérieure à cause du fait que nous approchons le complémentaire d'un ensemble A par des ouverts contenant le complémentaire $[0,1] \setminus A$. En repassant au complémentaire, on voit qu'en fait, on approche l'ensemble A par des sous-ensembles intérieurs à A dont on connaît la mesure. D'où l'appelation "intérieure".

Nous avons la proposition suivante, dont la preuve est laissée en exercice au lecteur :

2.4. Proposition. *$E \subset [0,1]$ est mesurable si et seulement si $m_*(E) = m^*(E)$. En particulier, E est mesurable si et seulement si E^c l'est.*

Nous avons les lemmes suivants :

Lemme 3. *Si $A \subset [0,1]$, nous avons $m_*(A) \leq m^* A$.*

Preuve. En effet, $A \cup A^c = [0,1]$, donc $m^*(A \cup A^c) = 1$.
Or $m^*(A \cup A^c) \leq m^*(A) + m^*(A^c) = m^*(A) + 1 - m_*(A)$, donc $1 \leq m^*(A) + 1 - m_*(A)$, soit encore $m_*(A) \leq m^*(A)$. $\square$

Lemme 4. *Tout sous-ensemble A de $[0,1]$ tel que $m^*(A)$ est mesurable.*

Preuve. En effet, si $m^*(A) = 0$, alors $0 \leq m_*(A) \leq m^*(A) = 0$, donc $m_*(A) = m^*(A)$. Ceci implique que A est mesurable. $\square$

Nous énonçons et démontrons le théorème d'additivité dénombrable pour les ensembles mesurables :

2.5 Théorème. *Soit (A_n) une suite d'ensembles mesurables de $[0,1]$, deux à deux disjoints. Alors $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ est mesurable et*

$$m^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} m^*(A_n).$$

Nous commençons la preuve par une série de lemmes techniques :

Lemme 5. *Si G_1 et G_2 sont deux ouverts de $[0,1]$, alors*

$$m^*(G_1) + m^*(G_2) \geq m^*(G_1 \cup G_2) + m^*(G_1 \cap G_2).$$

Preuve du lemme 5. Si G_1 et G_2 sont des intervalles, c'est évident.
Si G_1 et G_2 sont des réunions finies d'intervalles, c'est encore vrai. En effet, $m^*(G_1) = \int_0^1 \chi_{G_1}(x)dx$ (l'intégrale est prise au sens de l'intégrale de Riemann). De même pour $m^*(G_2)$, $m^*(G_1 \cup G_2)$ et $m^*(G_1 \cap G_2)$. L'inégalité (et on a même égalité dans ce cas) découle alors du fait que $\chi_{G_1} + \chi_{G_2} = \chi_{G_1 \cup G_2} + \chi_{G_1 \cap G_2}$, égalité qui se vérifie aisément.
Si G_1 et G_2 sont des ouverts arbitraires de $[0,1]$, nous savons que $G_1 = \bigcup_{i=0}^{\infty} I_i$ et $G_2 = \bigcup_{j=0}^{\infty} J_j$ où les I_i sont des intervalles ouverts disjoints et les J_j sont des intervalles ouverts disjoints. Si on se donne $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $\sum_{i=N+1}^{\infty} m^*(I_i) < \varepsilon$ et $\sum_{j=N+1}^{\infty} m^*(J_j) < \varepsilon$.
On définit $G_1' = \bigcup_{i=1}^{N} I_i$, $G_2' = \bigcup_{j=1}^{N} J_j$, $G_1'' = \bigcup_{i=N+1}^{\infty} I_i$ et $G_2'' = \bigcup_{j=N+1}^{\infty} J_j$. On a alors $G_1 \cup G_2 = G_1' \cup G_2' \cup G_1'' \cup G_2''$. La sous-additivité de m^* (théorème 2.2) donne $m^*(G_1 \cup G_2) \leq m^*(G_1' \cup G_2') + 2\varepsilon$.

De manière similaire, $G_1 \cap G_2 = (G_1' \cup G_1'') \cap (G_2' \cup G_2'') \subset (G_1' \cap G_2') \cup G_1'' \cup G_2''$, et donc $m^*(G_1 \cap G_2) \leq m^*(G_1' \cap G_2') + 2\varepsilon$.
Maintenant, $m^*(G_1) + m^*(G_2) \geq m^*(G_1') + m^*(G_2')$ (car G_1 est un ouvert contenant G_1', de même pour G_2), et $m^*(G_1') + m^*(G_2') = m^*(G_1' \cup G_2') + m^*(G_1' \cap G_2')$ puisque G_1' et G_2' sont des réunions finies d'intervalles. Et donc, $m^*(G_1) + m^*(G_2) \geq m^*(G_1 \cup G_2) - 2\varepsilon + m^*(G_1 \cap G_2) - 2\varepsilon$. Le lemme 5 s'obtient en faisant tendre ε vers 0. □

Lemme 6. *Si A et B sont deux sous-ensembles de $[0,1]$ tels que $A \subset B$, alors $m^*(A) \leq m^*(B)$ et $m_*(A) \leq m_*(B)$*

Preuve du lemme 6. Le premier point découle du fait que tout ouvert contenant B contient A. Le second point découle du fait que $[0,1] \setminus B \subset [0,1] \setminus A$ et du premier point. □

Lemme 7. *Si A_1 et A_2 sont deux sous-ensembles de $[0,1]$, alors*
i. $m^*(A_1) + m^*(A_2) \geq m^*(A_1 \cup A_2) + m^*(A_1 \cap A_2)$
ii. $m_*(A_1) + m_*(A_2) \leq m_*(A_1 \cup A_2) + m_*(A_1 \cap A_2)$

Preuve du lemme 7. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe deux ouverts G_1, G_2 tels que $A_1 \subset G_1$ et $A_2 \subset G_2$ et tels que $m^*(G_i) < m^*(A_i) + \varepsilon$ pour $i = 1, 2$. On a donc $m^*(A_1 \cup A_2) \leq m^*(G_1 \cup G_2) \leq m^*(G_1) + m^*(G_2) - m^*(G_1 \cap G_2)$ (la première inégalité est triviale, la seconde découle du lemme 3). On a donc $m^*(A_1 \cup A_2) \leq m^*(A_1) + \varepsilon + m^*(A_2) + \varepsilon - m^*(A_1 \cap A_2)$. Le point (i) en découle en faisant tendre ε vers 0. Pour le point (ii), on applique (i) aux ensembles $[0,1] \setminus A_1$ et $[0,1] \setminus A_2$. □

Corollaire 1 du lemme 7. *Si A_1 et A_2 sont deux ensembles mesurables de $[0,1]$, alors $A_1 \cup A_2$ et $A_1 \cap A_2$ sont mesurables.*

Preuve du corollaire 1. En effet,

$$\begin{aligned} m^*(A_1 \cup A_2) + m^*(A_1 \cap A_2) &\underbrace{\leq}_{\text{grâce au lemme 7 } (i)} m^*(A_1) + m^*(A_2) \\ &\underbrace{=}_{A_1 \text{ et } A_2 \text{ mesurables}} m_*(A_1) + m_*(A_2) \\ &\underbrace{\leq}_{\text{grâce au lemme 7}(ii)} m_*(A_1 \cup A_2) + m_*(A_1 \cap A_2). \end{aligned}$$

Comme, d'après le lemme 6, $m_*(A_1 \cap A_2) \leq m^*(A_1 \cap A_2)$ et $m_*(A_1 \cup A_2) \leq m^*(A_1 \cup A_2)$, on en déduit que toutes les égalités précédentes sont des égalités, et que $m_*(A_1 \cap A_2) = m^*(A_1 \cap A_2)$ et $m_*(A_1 \cup A_2) = m^*(A_1 \cup A_2)$. □

Corollaire 2 du lemme 7. *Si A_1 et A_2 sont deux sous-ensembles disjoints de $[0,1]$, on a $m_*(A_1 \cup A_2) \geq m_*(A_1) + m_*(A_2)$.*

Corollaire 3 du lemme 7. *Si (A_n) est une suite d'ensembles deux à deux disjoints de $[0,1]$, on a*

$$m_* \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right) \geq \sum_{n=0}^{\infty} m_*(A_n).$$

Preuve du corollaire 3. Le corollaire 2 nous donne que, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} m_*(A_n) \leq m_*\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) \leq m_*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right).$$

Le résultat en découle en faisant tendre N vers $+\infty$. $\square$

Passons maintenant à la preuve du théorème 2.5 : Puisque les A_n sont mesurables, nous avons

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) & \underbrace{\leq}_{\text{grâce au théorème 2.2}} \sum_{n=0}^{\infty} m^*(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} m_*(A_n) \\ & \underbrace{\leq}_{\text{grâce au corollaire 3}} m_*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \end{aligned}$$

Comme $m_*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leq m^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)$, on en déduit que toutes les inégalités dans la suite d'inégalités précédentes sont des égalités. Le théorème 2.5. en découle. $\square$

2.6 Corollaire. *Tout sous-ensemble ouvert ou fermé de* $[0,1]$ *est mesurable.*

Preuve. En effet, tout sous-ensemble ouvert est réunion dénombrable disjointe d'intervalles ouverts, qui sont mesurables. Les ensembles fermés sont complémentaires d'ensembles ouverts. $\square$

2.7. Corollaire. *Si* $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ *sont des sous-ensembles mesurables de* $[0,1]$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *est mesurable et* $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} m^*(A_n)$.

Preuve. Considérons la suite $A_1, A_2 \setminus A_1, A_3 \setminus A_2, \ldots$ Chaque ensemble est mesurable d'après le corollaire 1 du lemme 5 puisque $A_n \setminus A_{n-1} = A_n \cap ([0,1] \setminus A_{n-1})$. De plus, ces ensembles sont deux à deux disjoints, donc $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} (A_n \setminus A_{n-1})\right)$ est mesurable. De plus

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= m^*(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} m^*(A_n \setminus A_{n-1}) = m^*(A_1) + \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=2}^{N} m^*(A_n \setminus A_{n-1}) \\ &= \lim_{N\to+\infty} m^*\left(A_1 \cup \bigcup_{n=2}^{N} (A_n \setminus A_{n-1})\right) = \lim_{N\to+\infty} m^*(A_N). \end{aligned}$$

$\square$

2.8. Corollaire. *Soit* $(A_n)_n$ *une suite d'ensembles mesurables (non forcément disjoints) de* $[0,1]$. *Alors*

(1) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *est mesurable*

(2) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ *est mesurable.*

Preuve. On écrit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ comme la réunion disjointe

$$A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) \cup \cdots \cup \left(A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) \right) \cup \cdots$$

Le résultat découle du théorème 2.5. Le point (2) découle du fait que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [0,1] \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} ([0,1] \setminus A_n) \right)$$ □

2.9. Faisons le point de ce que nous avons accompli. A partir de maintenant, si A est un sous-ensemble mesurable de $[0,1]$, nous notons $m(A)$ et appelons *mesure de Lebesgue de* A le nombre $m^*(A)$. Nous notons $\mathcal{L}_{[0,1]}$ l'ensemble de tous les sous-ensembles mesurables de $[0,1]$. Nous avons obtenu les propriétés suivantes :

(1) $\forall A \in \mathcal{L}_{[0,1]}, \quad 0 \leq m(A) \leq 1.$

(2) $\forall A, B \in \mathcal{L}_{[0,1]}, \quad A \subset B \Rightarrow m(A) \leq m(B).$

(3) $m(\emptyset) = 0$ et $m([0,1]) = 1.$

(4) $\forall (A_n)_n \in \mathcal{L}_{[0,1]}^{\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints, $\quad m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n).$

De plus, m coïncide avec la longueur sur les intervalles.
Enfin,

(1′) $\emptyset \in \mathcal{L}_{[0,1]}.$

(2′) $A \in \mathcal{L}_{[0,1]} \Rightarrow [0,1] \setminus A \in \mathcal{L}_{[0,1]}$

(3′) $(A_n)_n \in \mathcal{L}_{[0,1]}^{\mathbb{N}} \Rightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}_{[0,1]}.$

L'ensemble des parties de $[0,1]$ vérifiant les propriétés (1'), (2') et (3') est appelé une *tribu*. Enfin, une fonction m définie sur une tribu de $[0,1]$ et vérifiant les propriétés (1), (2), (3) et (4) est appelée une *mesure*.

2.2 Mesure de Lebesgue des ensembles bornés.

Tout ce qui a été fait dans le cas des sous-ensembles de [0,1] dans la section 2.1 peut-être refait pour les sous-ensembles d'un intervalle $[a,b]$ quelconque de $\mathbb{R}$, à condition de remplacer la mesure intérieure A d'un sous-ensemble de $[a,b]$ par

$$m_*(A) = (b-a) - m^*([a,b] \setminus A).$$

Toutes les propriétés obtenues seront totalement identiques aux propriétés obtenues dans la section 2.1. La seule chose qui n'est pas claire est la chose suivante : si A est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$ contenu dans les intervalles $[a,b]$ et $[c,d]$, est-il vrai que la mesure intérieure de A en tant que sous-ensemble de $[a,b]$ est la même que la mesure intérieure de A en tant que sous-ensemble de $[c,d]$? La réponse est oui, et elle fait l'objet de la proposition suivante.

2.10. Proposition. *Si* $A \subset [a,b]$ *et* $A \subset [c,d]$, *alors*

$$(b-a) - m^*([a,b] \setminus A) = (d-c) - m^*([c,d] \setminus A).$$

Preuve. Tout d'abord, on a $A \subset [a,b] \cap [c,d]$ qui est un intervalle de la forme $[e,f] \subset [a,b]$. Si on montre que $(b-a) - m^*([a,b] \setminus A) = (f-e) - m^*([e,f] \setminus A)$, on aura de manière analogue $(f-e) - m^*([e,f] \setminus A) = (d-c) - m^*([c,d] \setminus A)$ et donc on aura le résultat escompté. On peut donc supposer que $[c,d] \subset [a,b]$, c'est-à-dire que $a \le c \le d \le b$.
Si on montre que le résultat est vrai pour $a < c < d < b$, alors la proposition en découlera. En effet, si le résultat est vrai pour les paires d'intervalles $[a-1,b+1],[c,d]$ et et $[a-1,b+1],[a,b]$, on en déduit qu'il est vrai pour la paire d'intervalles $[a,b],[c,d]$.
Soit $\varepsilon \in]0, \min(c-a, b-d, 1)[$. Il existe un ouvert U de $\mathbb{R}$ tel que $([c,d] \setminus A) \subset U$ et $m^*([c,d] \setminus A) \le m^*(U) \le m^*([c,d] \setminus A) + \varepsilon$. Posons $V =]a-\varepsilon, c[\cup U \cup]d, b+\varepsilon[$. V est ouvert, et nous avons $[a,b] \setminus A \subset V$.
La sous-additivité dénombrable de m^* sur l'intervalle $[a-1,b+1]$ se prouve de manière complètement analogue à la sous-additivité de m^* sur l'intervalle $[0,1]$ (théorème 2.2). Et donc,

$$\begin{aligned} m^*([a,b] \setminus A) &\le m^*(V) = m^*(]a-\varepsilon, c[\cup U \cup]d, b+\varepsilon[) \\ &\le (c-a+\varepsilon) + m^*(U) + (b-d+\varepsilon) \le c-a+b-d+m^*([c,d] \setminus A) + 3\varepsilon, \end{aligned}$$

soit encore

$$(b-a) - m^*([a,b] \setminus A) \ge (d-c) - m^*([c,d] \setminus A) - 3\varepsilon.$$

D'un autre côté, si V' est un ouvert contenant $[a,b] \setminus A$ et tel que $m^*(V') \le m^*([a,b] \setminus A) + \varepsilon$, alors $]a,c[\cup]d,b[\in V'$. Posons $U' = V' \setminus ([a+\frac{\varepsilon}{2}, c-\frac{\varepsilon}{2}] \cup [d+\frac{\varepsilon}{2}, b-\frac{\varepsilon}{2}]$. Comme V' est une réunion d'intervalles contenant les intervalles $]a,c[$ et $]b,d[$ dont la somme des longueurs vaut $m^*(V')$, et que U' est cette réunion d'intervalles auxquels on a retiré les intervalles $[a+\frac{\varepsilon}{2}, c-\frac{\varepsilon}{2}] \subset]a,c[$ et $[d+\frac{\varepsilon}{2}, b-\frac{\varepsilon}{2}] \subset]d,b[$, on en déduit que $m^*(U') = m^*(V') - (c-a-\varepsilon) - (b-d-\varepsilon)$, donc que

$$\begin{aligned} m^*([c,d] \setminus A) \le m^*(U') &= m^*(V') - (c-a) - (b-d) + 2\varepsilon \\ &\le m^*([a,b] \setminus A) - (c-a) - (b-d) + 3\varepsilon. \end{aligned}$$

soit encore que

$$(b-a) - m^*([a,b] \setminus A) \le (d-c) - m^*([c,d] \setminus A) + 3\varepsilon.$$

La proposition suit en faisant tendre ε vers 0. □

2.3. Mesure de Lebesgue des ensembles de $\mathbb{R}$.

La définition qui suit est alors naturelle.

2.11. Proposition et Définition. Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, on dit que A est mesurable si et seulement si $A \cap [-n,n]$ est mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On pose alors $m(A) = \lim_{n\to+\infty A} m^*(A\cap[-n,n])$. Cette limite existe puisqu'une suite croissante converge dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Preuve. Il suffit de vérifier que la suite $m^*(A\cap[-n,n])$ est croissante. Cela découle du fait que $m^*(A\cap[-n-1,n+1]) = m^*(A\cap[-n,n]\cup[(A\cap[-n-1,n+1])\setminus(A\cap[-n,n])]) = m^*(A\cap[-n,n]) + m^*[(A\cap[-n-1,n+1])\setminus(A\cap[-n,n])] \geq m^*(A\cap[-n,n])$ grâce aux caractères mesurables et disjoints des sous-ensembles considérés dans $[-n-1,n+1]$. □

La proposition suivante est immédiate :

2.12. Proposition. *Si A et B sont deux ensembles mesurables dans $\mathbb{R}$ tels que $A\subset B$, alors $m(A)\leq m(B)$.*

Preuve. En effet, $A\cap[-n,n]\subset B\cap[-n,n]$. □

Le théorème suivant généralise le théorème 2.5.

2.13. Théorème. *Si (A_n) est une suite d'ensembles mesurables de $\mathbb{R}$ disjoints, la réunion est mesurable et*

$$m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} m(A_n).$$

Preuve. En effet, si $N\in\mathbb{N}$,

$$m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\cap[-N,N]\right) = \sum_{n=0}^{\infty} m(A_n\cap[-N,N]) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m(A_n)$$

donc

$$m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m(A_n).$$

Si $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, et si $m(A)=+\infty$, l'inégalité précédente est alors une égalité. Supposons que $m(A)<+\infty$. Si $\varepsilon>0$ est fixé et si k est fixé, il existe un rang N tel que $m(A_n)\leq m(A_n\cap[-N,N] + \frac{\varepsilon}{k+1}$, pour $n=0,1,\ldots,k$. Et donc

$$\sum_{n=0}^{k} m(A_n) \leq \sum_{n=0}^{k} m(A_n\cap[-N,N]) + \varepsilon \leq \sum_{n=0}^{\infty} m(A_n\cap[-N,N]) + \varepsilon m(A\cap[-N,N]) + \varepsilon$$

$$\leq m(A)+\varepsilon.$$

Le théorème en découle en faisant tendre k vers $+\infty$ et ε vers 0. □

2.14. Corollaire. *Toute réunion dénombrable de mesurables est mesurable, toute intersection dénombrable de mesurables est mesurable, tout ouvert est mesurable, tout fermé est mesurable.*

3. Compléments sur les ensembles mesurables dans $\mathbb{R}$.

3.1. Existence d'ensembles non-mesurables et axiome du choix. On a vu, dans le théorème 1.7, que la construction d'ensembles non-mesurables était liée à l'axiome du choix. Il a été prouvé en logique mathématique, qu'on peut admettre que cet axiome du choix est vrai, ou bien le réfuter, auquel cas tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est mesurable pour la mesure extérieure. Toutefois, l'axiome du choix est important : il implique par exemple l'existence de bases dans tout espace vectoriel, ou encore il implique l'un des théorèmes les plus important de l'analyse : le théorème d'Hahn-Banach. Il est donc difficile de s'en passer.

Par contre, un résultat relativement récent de logique mathématique (Solovay, 1966) assure que l'on peut adjoindre aux axiomes de la théorie des ensembles sans introduire de contradiction, les formes dénombrables de l'axiome du choix et l'axiome "tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est mesurable", auquel cas il devient possible de faire de l'analyse dans des cadres dénombrables.

Ces considérations sont, bien entendu, bien au-delà du niveau de l'agrégation !

3.2. Critère de Carathéodory. On peut bien entendu définir la mesure extérieure $m^*(A)$ de tout sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ grâce à la définition 1.4, que A soit borné ou non. On a alors le critère de mesurabilité suivant :

$$(A \subset \mathbb{R} \text{ est mesurable }) \Leftrightarrow (\forall X \in E, \quad m^*(X) = m^*(X \cap A) + m^*(X \cap [\mathbb{R} \setminus A]).$$

3.3. Mesure intérieure. Pour un ensemble borné $A \subset \mathbb{R}$, la mesure intérieure $m_*(A)$ de A dans $[a, b]$ est par définition $b - a - m^*(A)$. Si A n'est pas borné, $m_*(A) = \lim_{n\to+\infty} m_*(A \cap [-n, n])$. On montre que, en utilisant le fait que tout compact est fermé borné donc mesurable,

$$m_*(A) = \sup\{m(K),\ K \text{ compact inclus dans } A\}.$$

On montre aussi le critère suivant :

$$(A \text{ est mesurable }) \Leftrightarrow (m_*(A) = m^*(A))$$

3.4. Boréliens et mesurables. On appelle famille des boréliens la plus petite famille contenant les ouverts et les fermés de $\mathbb{R}$, et stable par réunion dénombrable, par intersection dénombrable et par passage aux complémentaire. On la note $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, et on dit que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est la tribu engendrée par les ouverts et les fermés de $\mathbb{R}$. Il est alors clair que tout borélien est mesurable. Notons $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}$ tous les ensembles négligeables dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire les ensembles dont la mesure extérieure vaut 0. On démontre que la tribu des ensembles mesurables $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ est exactement la famille des ensembles $B \cup N$ où $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ et $N \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}}$.

4. Tribus

On présente à partir de maintenant une théorie abstraite de l'intégration.

4.1. Définition et exemples de tribus.

4.1. Définition. Soit Ω un ensemble et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. On note $A^c = \Omega \setminus A$. Soit $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. On dit que T est une *tribu* si

$$\begin{array}{ll}(1) & \Omega \in \mathcal{T} \\ (2) & \forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ A \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c \in \mathcal{T} \\ (3) & \forall (A_n)_n \in \mathcal{P}(\Omega)^{\mathbb{N}},\ \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{T}.\end{array}$$

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{T})$ est un *espace mesurable* et que tous les éléments de $\mathcal{T}$ sont les ensembles *mesurables.*
On appelle *mesure positive* sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute fonction $\mu : \mathcal{T} \to [0, +\infty]$ telle que

(1) $\mu(\emptyset) = 0$
(2) $\forall (A_n)_n \in \mathcal{P}(\Omega)^{\mathbb{N}}$, deux à deux disjoints,

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est un *espace mesuré.*
Si $\mu(\Omega) < +\infty$, on dit que μ est une mesure *finie.*
Si $\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ où $\mu(A_n) < \infty$, on dit que μ est $\sigma-$*finie.*

On donne quelques exemples d'espaces mesurés :

4.2. Mesure de Lebesgue sur $[a, b]$. On prend $\Omega = [a, b]$. $\mathcal{T}$ est la tribu $\mathcal{M}_{[a,b]}$ des sous-ensembles mesurables de $[a, b]$ pour la mesure de Lebesgue m. $([a, b], \mathcal{M}_{[a,b]}, m)$ est un espace mesuré, et m est une mesure finie.

4.3. Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On prend $\Omega = \mathbb{R}$. $\mathcal{T}$ est la tribu $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ des sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}$ pour la mesure de Lebesgue m. $([a, b], \mathcal{M}_{[a,b]}, m)$ est un espace mesuré, et m est une mesure $\sigma-$finie.

4.4. Mesure de Dirac en un point. Soit Ω un ensemble muni de la tribu $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$. Si $a \in \Omega$, on définit la mesure de Dirac en a par $\delta_a(A) = 1$ si $a \in A \in \mathcal{T}$ et par $\delta_a(A) = 0$ si $a \notin A \in \mathcal{T}$.

4.5. Mesure de comptage sur $\mathbb{N}$. On prend $\Omega = \mathbb{N}$. $\mathcal{T}$ est la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et μ_d est la mesure de comptage, c'est-à-dire que $\mu_d(A)$ est égal au cardinal de A, pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$ est un espace mesuré, et μ_d est une mesure $\sigma-$finie.

Nous avons la proposition élémentaire suivante :

4.6. Proposition. *Si $(\Omega, \mathcal{T})$ est un espace mesuré, $A, B \in \mathcal{T}$ et $(A_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$,*

$$\emptyset \in \mathcal{T}, \qquad A \setminus B \in \mathcal{T}, \qquad A \Delta B \in \mathcal{T}, \qquad \Big(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\Big) \in \mathcal{T}.$$

4.2. Construction de tribus.

4.7. Tribu induite. Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable. on se donne $A \in \mathcal{T}$. On note

$$\mathcal{T}_A = \{B \cap A / \ B \in \mathcal{T}\}.$$

$\mathcal{T}_A$ est une tribu sur A appelée *tribu induite sur A par $\mathcal{T}$.*

4.8. Tribu image réciproque. Soit $(\Omega', \mathcal{T}')$ un espace mesurable et $f : \Omega \to \Omega'$. On construit

$$\mathcal{T} = \{f^{-1}(B) / \ B \in \mathcal{T}'\}.$$

Alors $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω appelée *tribu image réciproque de $\mathcal{T}'$ par f.*

4.9. Tribu image directe. Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $f : \Omega \to \Omega'$. On construit

$$\mathcal{T}' = \{B' / f^{-1}(B') \in \mathcal{T}\}.$$

Alors $\mathcal{T}'$ est une tribu sur Ω' appelée *tribu image directe de $\mathcal{T}$ par f.*

4.3. Tribus engendrées par un ensemble de parties.

4.10. Tribu engendrée par un ensemble de parties. Soit $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille de tribus sur Ω, alors $\mathcal{T} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ est une tribu. En particulier, si $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$ est une tribu, appelée *tribu engendrée par* $\mathcal{A}$. On la note $\sigma(A)$.

Remarques.
Si $\mathcal{A} = \{A\}$, alors $\sigma(A) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$.
Si $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ implique $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B})$.
Il n'existe pas de procédé effectif (*i.e.* d'écriture combinant dénombrablement complémentation et réunion décrivant les éléments de $\sigma(\mathcal{A})$ en fonction des éléments de $\mathcal{A}$.

4.11. Proposition. *Soit $f : \Omega \to \Omega'$ une application. Soit $\mathcal{A}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$. Alors, $f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}')) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}'))$.*

4.4. Tribu borélienne d'un espace métrique.

4.12. Tribu borélienne d'un espace métrique. Soit (E, d) un espace métrique, $\mathcal{O}$ la famille des ouverts de E et $\mathcal{F}$ la famille des fermés de E. On appelle *tribu borélienne* et on note $\mathcal{B}_E$ la tribu $\sigma(\mathcal{O})$.

4.13. Proposition. $\mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{F})$. *Si E' est un sous-ensemble de E muni de la métrique induite, les boréliens de E' sont les traces sur E' des boréliens de E.*

4.14. Proposition. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma\{]a, b[,\ a, b \in \mathbb{R}\}$.

Preuve. En effet, tout ouverts est réunion dénombrable d'intervalles ouverts, et $]a, +\infty[= \bigcup_{n\geq a}]a, n[$. □

5. Fonctions mesurables.

5.1 Fonctions mesurables.

5.1. Définition. Soient $(\Omega, \mathcal{T})$ et $(\Omega', \mathcal{T}')$ deux espaces mesurables et $f : \Omega \to \Omega'$. On dit que f est $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')-$*mesurable* (ou plus simplement *mesurable*) si et seulement si,

$$\forall A' \in \mathcal{P}(\Omega'), \qquad A' \in \mathcal{T}' \Rightarrow f^{-1}(A') \in \mathcal{T}.$$

Si (F,d') est un espace métrique, $f:\Omega\to F$ est dite *mesurable* si et seulement si elle est $(\mathcal{T},\mathcal{B}_F)-$mesurable.
Si (E,d) et (F,d') sont deux espaces métriques, $f:E\to F$ est dite *borélienne* si et seulement si elle est $(\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)-$mesurable.

5.2. Proposition. *Si $(\Omega,\mathcal{T})$ et $(\Omega',\mathcal{T}')$ sont deux espaces mesurables et $\mathcal{A}'\subset\mathcal{P}(\Omega')$ telle que $\mathcal{T}'=\sigma(\mathcal{A}')$; alors $f:\Omega\to\Omega'$ est mesurable si et seulement si, pour tout $A'\in\mathcal{A}$, $f^{-1}(A')\in\mathcal{T}$.*

5.3. Proposition. *Soit $(\Omega,\mathcal{T})$ un espace mesuré et, pour $A\in\mathcal{P}(\Omega)$, $\chi_A:\Omega\to\mathbb{R}$. Alors χ_A est mesurable si et seulement si A est mesurable.*

5.4. Proposition. *Soient (E,d) et (F,d') deux espaces métriques, $f:E\to F$. Si f est continue, alors f est borélienne.*

5.5. Proposition. *Soient $(\Omega,\mathcal{T})$ et $(\Omega',\mathcal{T}')$ deux espaces mesurables. On suppose que $\Omega=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Omega_n$ et que pour tous $i\neq j$, $\Omega_i\cap\Omega_j=\emptyset$. On munit chaque Ω_n de la tribu induite $\mathcal{T}_{\Omega_n}$ par $\mathcal{T}$ sur Ω_n. Alors $f:\Omega\to\Omega'$ est mesurable si et seulement si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_{|\Omega_n}:\Omega_n\to\Omega'$ est mesurable.*

5.6. Corollaire. *Soit $(\Omega,\mathcal{T})$ et $(\Omega',\mathcal{T}')$ deux espaces mesurables, $f:\Omega\to\Omega'$ mesurable. Soit $A\in\mathcal{T}$, $a'\in\Omega$, $g:\Omega\to\Omega'$ telle que $g_{|A}=f_{|A}$ et $g_{|A^c}=a$. Alors g est mesurable.*

5.2. Opérations sur les fonctions mesurables.

5.7. Proposition. *Soient $(\Omega,\mathcal{T})$, $(\Omega',\mathcal{T}')$ et $(\Omega'',\mathcal{T}'')$ trois espaces mesurables, $f:\Omega\to\Omega'$, $g:\Omega'\to\Omega''$ deux fonctions mesurables. Alors $g\circ f$ est mesurable.*

5.8. Proposition. *Soit $(\Omega,\mathcal{T})$ un espace mesurable, $u,v:\Omega\to\mathbb{R}$ mesurables. Posons $f(x)=(u(x),v(x))$ pour $x\in\Omega$. Alors f est mesurable.*

Preuve. Tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est réunion dénombrable de pavés $I_n\times J_n$ où I_n et J_n sont des intervalles de $\mathbb{R}$. Le reste de la preuve suit facilement. $\square$

5.9. Proposition.
-Soit $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$. $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ *sont mesurables si et seulement si* f *est mesurable. En particulier,* f *mesurable implique* $|f|$ *mesurable.*
- Soient $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ *mesurables et* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Alors* $f + g, \lambda f, fg$ *sont mesurables. La fonction qui vaut* $1/f$ *si* f *est non nulle et* $a \in \mathbb{C}$ *sinon est elle aussi mesurable.*
- Soient $f, g : \Omega, \to \mathbb{R}$ *mesurables, alors* $\sup(f, g)$ *et* $\inf(f, g)$ *sont mesurables. En particulier* $f^+ = \sup(f, 0)$ *et* $f^- = \sup(-f, 0)$ *sont mesurables. En effet,* $\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ *et* $\inf(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$.

5.10. Proposition. $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *est mesurable si et seulement si, pour tout* $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([a, +\infty]) \in \mathcal{T}$.

5.11. Corollaire. *Soit* $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *une suite d'applications mesurables. Alors* $\sup_{k\geq n} f_k$, $\inf_{k\geq n} f_k$, $\limsup f_n$ *et* $\liminf f_n$ *sont mesurables.*

Preuve. En effet, pour $a \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\sup_{k\geq n} f_k(x) \geq a \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{k\geq n} f_k^{-1}([a, +\infty]).$$

On écrit ensuite que $\limsup f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} f_k$. □

5.12. Corollaire. *Soit* $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers une fonctions* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. *Alors* f *est mesurable.*

Preuve. $f = \limsup f_n$. □

On remarque que la notion de mesurabilité est d'une grande souplesse, contrairement par exemple à la notion de continuité.
Ce corollaire est très maniable d'un point de vue pratique : pour montrer qu'une fonction est mesurable, on commence par montrer qu'elle est limite simple d'une suite de fonctions mesurables.

5.3. Fonctions simples.

5.14. Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On dit que f est *simple* si et seulement si f est mesurable et prend un nombre fini de valeurs. On note $\mathcal{S}$ (*resp.* $\mathcal{S}^+$) l'ensemble des fonctions simples (*resp.* positives simples).

Les valeurs $+\infty$ et $-\infty$ sont exclues afin de ne pas avoir $-\infty + +\infty$ dans les calculs.

5.16. Proposition. *Une fonction f est simple si et seulement si il existe un nombre fini d'ensembles mesurables $A_1, \ldots A_n$ et un nombre fini de nombres réels $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ tels que*

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i}.$$

Preuve. Dans le sens réciproque, c'est clair. Sinon, poser $A_i = \{x/\ f(x) = \lambda_i\}$ où les λ_i sont les valeurs prises par f. □

Attention ! la décomposition d'une fonction simple ci-dessus n'est pas unique. Par exemple,

$$\chi_{[0,1[} + 2\chi_{[1,2]} = \chi_{[0,2]} + \chi_{[1,2]}.$$

Si f, g sont deux fonctions simples et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f+g$, λf, fg, $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont simples.

Le théorème suivant est fondamental :

5.17. Théorème d'approximation. *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $f : \Omega \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Alors il existe une suite croissante (f_n) de fonctions simples qui converge simplement vers f.*

Preuve. Construisons tout d'abord la suite (f_n) de la manière suivante. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$E_{n,k} = \left\{ x \in \Omega / \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\} \quad \text{et} \quad E'_n = \{x \in \Omega / f(x) \geq n\}$$

où $k \in \{0, 1, \ldots, n2^n - 1\}$, et on pose

$$f_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \chi_{E_{n,k}} + n\chi_{E'_n}.$$

La suite (f_n) converge simplement vers f. En effet, si $f(x) = +\infty$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in E'_n$, ce qui implique que $f_n(x) = n$ converge vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$. Sinon, $f(x) < +\infty$ et donc, pour $f(x) < n$,

$$f_n(x) = \frac{E(2^n f(x))}{2^n} \longrightarrow_{n\to+\infty} f(x),$$

où $E(\cdot)$ désigne la partie entière.
Il reste à vérifier que la suite (f_n) est croissante ; soit $x \in \Omega$. Supposons $x \in E'_n$, alors $f(x) \geq n$ implique $f_n(x) = n$. Si l'on suppose que $f(x) \geq n+1$, alors $f_{n+1}(x) = n+1 > n = f_n(x)$. Si l'on suppose que $f(x) \in [n, n+1[$, alors $f_n(x) = n$ et $f_{n+1}(x) = \frac{E(2^{n+1}f(x))}{2^{n+1}} \geq \frac{E(2^{n+1}n)}{2^{n+1}} = n$ car $x \mapsto E(x)$ est croissante.
Supposons maintenant $x \notin E'_n$, ce qui entraîne que $x \notin E'_{n+1}$. On a donc

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}}(E(2^{n+1}f(x)) - 2E(2^n f(x))) \geq 0$$

car, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $E(2y) \geq 2E(y)$. □

Si f est bornée, alors il y a convergence uniforme de la suite de fonctions ainsi construite.
Dans la suite, nous intégrerons les fonctions de la manière suivante : tout d'abord, on intégrera les fonctions indicatrices, puis les fonctions simples, ensuite, on intégrera les fonctions mesurables positives grâce à ce théorème, enfin on intégrera les fonctions mesurables quelconques en écrivant que $f = u + iv$ où u, v sont à valeurs réelles et en écrivant que $u = u^+ - u^-$, $v = v^+ - v^-$.

6. Mesures.

6.1. Généralités sur les mesures.

Nous rappelons la définition d'une mesure positive :

6.1. Définition. On appelle *mesure positive* sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute fonction $\mu : \mathcal{T} \to [0, +\infty]$ telle que

(1) $\mu(\emptyset) = 0$

(2) $\forall (A_n)_n \in \mathcal{P}(\Omega)^{\mathbb{N}}$, deux à deux disjoints,

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est un *espace mesuré.*
Si $\mu(\Omega) < +\infty$, on dit que μ est une mesure *finie.*
Si $\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ où $\mu(A_n) < \infty$, on dit que μ est $\sigma-$*finie.*

6.2. Proposition. *Si* $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{T}^n$ *sont disjoints, alors*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

6.3. Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mathcal{T}$ contient les singletons.
On dit que μ est une mesure *discrète* si et seulement si il existe un sous-ensemble dénombrable D de Ω (donc mesurable) tel que $\mu(D) > 0$ et $\mu(D^c) = 0$.
On dit que μ est une mesure *continue* si et seulement si pour tout $a \in \Omega$, $\mu(\{a\}) = 0$.

Par exemples, la mesure de Dirac en un point et la mesure de dénombrement sont des exemples de mesures discrètes. La mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$ est un exemple de mesure continue.

6.2. Construction de mesures.

6.4. Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $A \in \mathcal{T}$. On note $\mathcal{T}_A$ la tribu induite par $\mathcal{T}$ sur A. L'espace $(\Omega, \mathcal{T}_A, \mu_A)$ est un espace mesuré, où on a posé

$$\forall X \in \mathcal{T}_A, \qquad \mu_A(X) = \mu(X).$$

On dit que μ_A est la *mesure induite par* μ *sur* A.

6.5. Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(\Omega', \mathcal{T}')$ un espace mesurable. Si $f : \Omega \to \Omega'$ est une fonction mesurable, on définit une mesure μ' sur Ω' dite *mesure image de* μ *par* f en posant

$$\forall A' \in \mathcal{T}', \qquad \mu'(A') = \mu(f^{-1}(A')).$$

6.3. Propriétés des mesures.

6.6. Proposition. *Tous les ensembles considérés ici sont mesurables.*
- μ *est croissante, c'est-à-dire* $A \subset B$ *implique* $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- *Si* $\mu(A) < \infty$ *et* $B \subset A$ *alors* $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.

- $\mu(A\cup B)+\mu(A\cap B)=\mu(A)+\mu(B)$.
- μ est dénombrablement sous-additive, c'est-à-dire

$$\forall (A_n)\in \mathcal{T}^{\mathbb{N}},\qquad \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)\leq \sum_{n=0}^{\infty}\mu(A_n).$$

- Si (A_n) est une suite croissante pour l'inclusion d'éléments de $\mathcal{T}$, alors

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)=\sup \mu(A_n)=\lim_{n\to+\infty}\mu(A_n).$$

- Si (A_n) est une suite décroissante pour l'inclusion d'éléments de $\mathcal{T}$, et si il existe n_0 tel que $\mu(A_{n_0})<+\infty$, alors

$$\mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right)=\inf \mu(A_n)=\lim_{n\to+\infty}\mu(A_n).$$

- Le résultat est faux si on ne suppose pas l'existence d'un n_0 tel que $\mu(A_{n_0})<\infty$. On peut, par exemple, considérer $A_n=]n,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

6.4. La notion de "presque-partout".

La phrase $B\subset A$ et $\mu(A)=0$ implique $\mu(B)=0$ est fausse car B n'est pas forcément mesurable. On va introduire la notion de tribu complétée pour remédier à ce défaut.

6.7. Définition. Soit $(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré et $N\in\mathcal{P}(\Omega)$. On dit que N est $\mu-$*négligeable* si et seulement si il existe $A\in\mathcal{T}$ tel que $N\subset A$ et tel que $\mu(A)=0$.

En particulier, un sous-ensemble d'un négligeable est négligeable, et une union dénombrable de négligeables est négligeable. Nous allons maintenant agrandir la tribu initiale pour que celle-ci contienne les ensembles $\mu-$négligeables.

6.8. Théorème et définition. *Soit $(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré. L'ensemble des parties B de Ω de la forme $B=A\cup N$ où $A\in\mathcal{T}$ et N est négligeable est une tribu sur Ω, notée $\widehat{\mathcal{T}}_\mu$ et appelée tribu complétée de la tribu $\mathcal{T}$. On prolonge μ à $\widehat{\mathcal{T}}_\mu$ en posant $\mu(B)=\mu(A)$. On vérifie qu'on obtient bien une mesure. Si $\mathcal{T}=\widehat{\mathcal{T}}_\mu$, on dit que $\mathcal{T}$ est complète.*

Par exemple, la tribu des mesurables sur $\mathbb{R}$ est la tribu complétée des boréliens sur $\mathbb{R}$.

6.9. Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Une propriété P est dite *vraie presque partout* si et seulement si l'ensemble des points pour lesquels elle est fausse est négligeable. On note $\mu-$p.p. ou encore p.p. Pour $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ espace mesuré et sur l'ensemble des fonctions mesurables de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, on définit la relation d'équivalence $f\mathcal{R}g$ si et seulement si $f = g$ p.p. On appelle *classe de fonctions* tout élément de l'espace quotient des fonctions mesurables par la relation d'équivalence précédente.

7. Intégration.

7.1. Intégration des fonctions simples.

7.1. Définition. Si s est une fonction simple de la forme $s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i}$ où les A_i sont mesurables et forment une partition de Ω et (λ_i) sont réels, on appelle *intégrale de s par rapport à μ* le nombre

$$\int_\Omega s \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu(A_i).$$

Si E est mesurable, on appelle *intégrale de s par rapport à μ sur E* le nombre

$$\int_E s \, d\mu = \int_\Omega (s\chi_E) \, d\mu.$$

Dans cette définition, on fait la convention que $0 \times (+\infty) = 0$.

7.2. Proposition. *Si s et t sont deux fonctions simples, alors*

$$\int_\Omega (s+t) \, d\mu = \int_\Omega s \, d\mu + \int_\Omega t \, d\mu.$$

En particulier, la définition 7.1. est claire, c'est-à-dire que l'intégrale de s ne dépend pas de la décomposition $s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i}$ choisie (il suffit de prendre $t = -s$).

Preuve. Si $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ et $t = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}$ où les (A_i) forment une partition de Ω et les (B_j) aussi,

$$s + t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_i + \beta_j) \chi_{A_i \cap B_j}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (s+t) d\mu = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_i + \beta_j) \mu(A_i \cap B_j) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) \\ = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j) \end{aligned}$$

car les (A_i) et les (B_j) forment une partition de Ω. On a bien obtenu

$$\int_{\Omega} (s+t) d\mu = \int_{\Omega} s \, d\mu + \int_{\Omega} t \, d\mu.$$

□

7.3. Propriétés.

- *Si* $\mu = \delta_a$*, alors* $\int_{\Omega} s \, d\mu = s(a)$.
- *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\int_{\Omega} (\lambda s) d\mu = \lambda \int_{\Omega} s \, d\mu$.
- *Si* s *et* t *sont simples telles que* $s \leq t$*, alors* $\int_{\Omega} s \, d\mu \leq \int_{\Omega} t \, d\mu$.
- *Si* $s = \sum \lambda_i \chi_{A_i}$ *est simple et* $E \in \mathcal{T}$, $\int_E s \, d\mu = \sum \lambda_i \mu(A_i \cap E)$.
- *Si* (E_n) *est une suite croissante d'ensembles mesurables dont la réunion est* Ω*, alors* $\lim_{n \to +\infty} \int_{E_n} s \, d\mu = \int_{\Omega} s \, d\mu$*, pour toute fonction simple (cela découle du fait que pour tout* $A \in \mathcal{T}$, $\lim_{n \to +\infty} \mu(A \cap E_n) = \mu(A)$*).*

Si $E, F \in \mathcal{T}$ *sont disjoints,* $\int_{E \cap F} s \, d\mu = \int_E s \, d\mu + \int_F s \, d\mu$.

7.2. Intégration des fonctions mesurables positives.

On note $\mathcal{M}^+$ l'espace des fonctions mesurables positives de $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ dans $\overline{\mathbb{R}}+$.

On rappelle que si (f_n) est une suite croissante de fonctions, alors $f = \lim_{n \to +\infty} f_n$ existe en tant que fonction $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$.

Enfin, on remarque que si $f \in \mathcal{M}^+$, alors pour tout $E \in \mathcal{T}$, $f \chi_E \in \mathcal{M}^+$.

On rappelle que $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des fonctions simples, et $\mathcal{S}^+$ l'ensemble des fonctions simples positives.

7.4. Définition. Si $f \in \mathcal{M}^+$, on pose

$$\int_\Omega f\,d\mu = \sup_{\substack{s\in\mathcal{S}^+\\ s\leq f}} \int_\Omega s\,d\mu.$$

Si $E \in \mathcal{T}$, on pose

$$\int_E f\,d\mu = \int_\Omega (f\chi_E)\,d\mu.$$

On remarque que, si f est simple positive, la définition actuelle est identique à la précédente.
Si $f, g \in \mathcal{M}^+$, $f \leq g$ implique $\int_\Omega f\,d\mu \leq \int_\Omega g\,d\mu$.
Si $f \in \mathcal{M}^+$ et $E, F \in \mathcal{T}$, $E \subset F$ implique $\int_E f\,d\mu \leq \int_F f\,d\mu$.

7.5. Théorème de la convergence monotone ou théorème de Beppo-Levi. *Soit* $(f_n)_n \in {\mathcal{M}^+}^{\mathbb{N}}$ *une suite croissante de fonctions mesurables positives. Si* $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$*, alors*

$$\int_\Omega f\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\,d\mu.$$

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \leq f$ implique $\displaystyle\int_\Omega f_n\,d\mu \leq \int_\Omega f\,d\mu$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\,d\mu$ (qui existe car une suite croissante converge dans $\overline{\mathbb{R}}$) est inférieure à $\displaystyle\int_\Omega f\,d\mu$.
Soit $\lambda \in]0,1[$ et soit $s \in \mathcal{S}^+$ telle que $s \leq f$. On note, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$E_n^\lambda(s) = \{x \in \Omega/\ \lambda s(x) \leq f_n(x)\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_n^\lambda(s) = (\lambda s - f_n)^{-1}(]-\infty, 0]) \in \mathcal{T}$. De plus, $(E_n^\lambda(s))_n$ est une suite croissante. Il est alors clair que $\bigcup_{n=0}^\infty E_n^\lambda(s) = \Omega$. On obtient donc

$$\lambda \int_{E_n^\lambda(s)} s\,d\mu = \int_{E_n^\lambda(s)} \lambda s\,d\mu \leq \int_{E_n^\lambda(s)} f_n\,d\mu \leq \int_{E_n^\lambda(s)} f\,d\mu \leq \int_\Omega f\,d\mu.$$

En particulier, en faisant tendre n vers l'infini et λ vers 1 dans cette inégalité, nous obtenons

$$\int_\Omega s\,d\mu \leq \lim_{n\to+\infty}\int_{E_n^\lambda(s)} f_n\,d\mu \leq \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n\,d\mu \leq \int_\Omega f\,d\mu.$$

En prenant la borne supérieure quand $s \leq f$, nous obtenons le résultat. $\square$

7.6. Corollaire. *Si* $(u_n)_n \in (\mathcal{M}^+)^{\mathbb{N}}$, *alors*

$$\int_\Omega \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) d\mu = \sum_{n=0}^{\infty}\int_\Omega u_n\,d\mu.$$

7.7. Corollaire. *Une série, c'est une intégrale. Si* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, *et si l'espace mesurable* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *est muni de la mesure de comptage* μ_d, *on a*

$$\int_{\mathbb{N}} f\,d\mu_d = \sum_{n=0}^{\infty} f(k).$$

Preuve. Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \{0, 1, \ldots, n\}$ et $f_n = f\chi_{E_n}$. On a $f_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)\chi_{\{k\}}$ et f_n est une suite croissante qui converge simplement vers f. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{N}} f_n\,d\mu_d = \int_{\mathbb{N}} f\,d\mu_d.$$

Or

$$\int_{\mathbb{N}} f_n\,d\mu_d = \int_{\mathbb{N}}\left(\sum_{k=0}^{n} f(k)\chi_{\{k\}}\right) d\mu_d = \sum_{k=0}^{n} f(k)\mu_d(\{k\}) = \sum_{k=0}^{n} f(k).$$

$\square$

L'hypothèse de croissance des f_n est fondamentale. En effet, si l'on prend $f_n(x) = 0$ si $x \leq n$, $f_n(x) = 1$ si $x \in]n, n+1][$ et $f_n(x) = 0$ si $x \geq n+1$, alors f_n converge simplement vers 0, l'intégrale sur $\mathbb{R}$ des $f_n(x)$ vaut 1 et ne converge pas vers l'intégrale de la limite qui vaut 0.

En utilisant le théorème d'approximation 5.17 et en passant à la limite en utilisant le théorème de convergence monotone 7.5, on en déduit la propriété suivante :

- Si $f, g \in \mathcal{M}^+$ et si $\alpha, \beta \geq 0$ alors $\int_\Omega (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_\Omega f\, d\mu + \beta \int_\Omega g\, d\mu$.

On obtient aussi la propriété suivante :

- Si (E_n) est une suite croissante d'ensembles mesurables et $E = \bigcup_{n=0}^\infty E_n$, $f \in \mathcal{M}^+$, on a $\lim \int_{E_n} f\, d\mu = \int_E f\, d\mu$ (considérer $f_n = f\chi_{E_n}$).

Enfin, on montre facilement :

- Si $E, F \in \mathcal{T}$ et $E \cap F = \emptyset$, alors $\int_{E\cap F} f\, d\mu = \int_E f\, d\mu + \int_F f\, d\mu$.

7.8. Théorème de Fatou. *Soit* $(f_n)_n \in (\mathcal{M}^+)^{\mathbb{N}}$, *alors*

$$\int_\Omega \liminf f_n\, d\mu \leq \liminf \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

Preuve. On pose $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$ alors g_n est croissante et converge vers $\liminf f_n$. Donc

$$\int_\Omega g_n\, d\mu \longrightarrow_{n\to+\infty} \int_\Omega \liminf f_n\, d\mu$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n \leq f_n$, donc

$$\liminf \int_\Omega f_n\, d\mu \geq \liminf \int_\Omega g_n\, d\mu = \lim \int_\Omega g_n\, d\mu = \int_\Omega \liminf f_n\, d\mu$$

□

L'inégalité dans le théorème de Fatou peut-être stricte comme le montre l'exemple suivant : on prend $f_n(x) = n$ pour $x \in [0, 1/n]$ et $f_n(x) = 0$ sinon. f_n converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}^*$, donc $\int \liminf f_n(x) dx = 0$. Or $\int_\mathbb{R} f_n(x) dx = 1$.

7.3. Absolue continuité d'une mesure par rapport à une autre.

7.9. Proposition et définition. Soit $p \in \mathcal{M}^+$. L'égalité

$$\forall E \in \mathcal{T}, \qquad \nu(E) = \int_E p\, d\mu$$

définit une mesure ν sur $(\Omega, \mathcal{T})$. Elle vérifie $\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$. On l'appelle *mesure de densité* p *par rapport à la mesure* μ. On note $\nu = p\mu$ ou encore $d\nu = p\, d\mu$.

Preuve. $\nu(\emptyset) = \int_\emptyset p\, d\mu = 0$. De plus si (E_n) est une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints,

$$\nu\left(\bigcup_{n=0}^\infty E_n\right) = \int_\Omega p\chi_{\bigcup_{n=0}^\infty E_n}\, d\mu = \int_\Omega \left(\sum_{n=0}^\infty p\chi_{E_n}\right) d\mu$$

$$\underset{\text{Corollaire 7.6}}{=} \sum_{n=0}^\infty \int_\Omega p\chi_{E_n}\, d\mu = \sum_{n=0}^\infty \nu(E_n).$$

□

7.10. Proposition. $\forall f \in \mathcal{M}^+$,
$$\int_\Omega f\, d\nu = \int_\Omega (fp)\, d\mu.$$

Preuve. On le vérifie pour les fonctions simples. On passe à la limite pour l'obtenir pour les fonctions mesurables. □

La réciproque fait l'objet de la suite.

7.11. Définition. Si deux mesures μ et ν sont données, on dit que ν *est absolument continues par rapport à* μ et on note $\nu \ll \mu$ si
$$\forall E \in \mathcal{T}, \qquad \mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0.$$

7.12. Proposition. *$\nu \ll \mu$ si et seulement si*
$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists \alpha > 0 \qquad (\mu(E) < \alpha) \Rightarrow (\nu(E) < \varepsilon).$$

7.13. Théorème de Radon-Nikodym. *Si μ et ν sont deux mesures telles que $\nu \ll \mu$. Alors il existe une unique (à $\mu-$p.p. près) fonction mesurable positive p telle que $d\nu = pd\mu$.*

7.14. Définition. *p est alors appelée la dérivée de Radon-Nikodym et est notée* $\dfrac{d\nu}{d\mu}$.

7.4. Intégration et “presque partout”.

7.15. Proposition. *Si $f \in \mathcal{M}^+$, $\int_\Omega f\, d\mu = 0$ si et seulement si $f = 0$ $\mu-$p.p.*

Preuve. La réciproque est claire. Montrons l'implication directe. Soit $A = \{x \in \Omega /\ f(x) > 0\}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \{x \in \Omega /\ f_n(x) \geq \frac{1}{n}\}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A = \bigcup_{n=0}^\infty E_n$ et la suite (E_n) est croissante. On a donc $\mu(A) = \lim \mu(E_n)$. Or
$$0 = \int_\Omega f\, d\mu \geq \int_{E_n} f\, d\mu \geq \int_{E_n} \frac{1}{n}\, d\mu = \frac{\mu(E_n)}{n},$$
donc $\mu(E_n) = 0$. Ceci entraîne $\mu(A) = 0$. □

7.16. Proposition. *Si $f \in \mathcal{M}^+$ est telle que $\int_\Omega f\, d\mu < +\infty$, alors f est finie presque partout.*

Preuve. Si $A = \{x \in \Omega /\ f(x) = +\infty\}$, on a $(+\infty)\chi_A \leq f$, donc $(+\infty)\mu(A) < +\infty$. Ceci entraîne $\mu(A) = 0$. □

7.17. Proposition. *Si $f, g \in \mathcal{M}^+$, alors $f = g$ μ−p.p. implique $\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega g\,d\mu$.*

Preuve. Posons $h = \inf(f, g) \in \mathcal{M}^+$. Définissons $\widehat{f}(x) = f(x) - h(x)$ si $h(x) < +\infty$ et $f(x) = 0$ sinon. Définissons de même, $\widehat{g}(x) = g(x) - h(x)$ si $h(x) < +\infty$ et $\widehat{g}(x) = 0$ sinon. On a $\widehat{f} \in \mathcal{M}^+$ et $\widehat{g} \in \mathcal{M}^+$. On a $f = \widehat{f} + h$, $g = \widehat{g} + h$. De plus, $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$ sont nulles presque partout. Donc

$$\int_\Omega \widehat{f}\,d\mu = 0 \qquad \Longrightarrow \int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega h\,d\mu$$

et

$$\int_\Omega \widehat{g}\,d\mu = 0 \qquad \Longrightarrow \int_\Omega g\,d\mu = \int_\Omega h\,d\mu,$$

d'où le résultat. □

7.18. Extension du théorème de la convergence monotone. *Soit $(f_n)_n \in (\mathcal{M}^+)^{\mathbb{N}}$ une suite croissante presque partout et qui converge presque partout vers f. Alors*

$$\int_\Omega f\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\,d\mu.$$

Preuve. En effet, f_n est croissante et converge vers f sur $A \in \mathcal{T}$ tel que $\mu(A^c) = 0$. On applique le théorème de la convergence monotone à la suite de fonctions $(f_n\chi_A)$ et on utilise le fait que $f_n\chi_A = f_n$ p.p. et $f\chi_A = f$ p.p. □

7.5. Fonctions intégrables.

7.19. Définition. Soit $f : (\Omega, \mathcal{T}, \mu) \to \mathbb{C}$ mesurable. On dit que f est μ−intégrable si et seulement si $\int_\Omega |f|\,d\mu < +\infty$. On note $\mathcal{L}^1(\Omega)$ l'ensemble de ces fonctions. Si $f = u + iv$ et $u = u^+ - u_-$, $v = v^+ - v-$ où $u^+ = \sup(u, 0)$ et $u^- = \sup(-u, 0)$, on pose

$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega u^+\,d\mu - \int_\Omega u^-\,d\mu + i\int_\Omega v^+\,d\mu - i\int_\Omega v^-\,d\mu$$

Si $E \in \mathcal{T}$, on dit que f est intégrable sur E si et seulement si $f\chi_E$ est intégrable.

7.20. Théorème.
- $\mathcal{L}^1(\Omega)$ est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel.
- L'intégrale $I : \mathcal{L}^1(\Omega) \ni f \mapsto \int_\Omega f\, d\mu$ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{L}^1(\Omega)$, c'est-à-dire que $f \geq 0$ entraîne $I(f) \geq 0$.
- $\left|\int_\Omega f d\mu\right| \leq \int_\Omega |f|\, d\mu$.
- $\|f\|_1 = \int_\Omega |f|\, d\mu$ définit une semi-norme sur $\mathcal{L}^1(\Omega)$.

7.6. Le théorème de la convergence dominée.

7.21. Lemme. "Théorème de convergence monotone pour les suites décroissantes. *Soit $(\varphi)_n$ une suite décroissante de fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers 0 sur Ω. On suppose que $\int_\Omega \varphi_0\, d\mu < +\infty$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_\Omega \varphi_n\, d\mu < +\infty$ et $\lim_n \int_\Omega \varphi_n\, d\mu = 0$.*

Preuve. On applique le théorème de la convergence monotone 7.5 à la suite $\phi_n = \varphi_0 - \varphi_n$. □

7.22. Théorème de la convergence dominée (Lebesgue 1908-1910). *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables à valeurs complexes de Ω dans $\mathbb{C}$ qui converge simplement vers f. On suppose qu'il existe $g : \Omega \to \mathbb{R}^+$ intégrable telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$; alors :*
(i) les f_n et f sont intégrables.
(ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |f - f_n|\, d\mu = 0$.
(iii) $\displaystyle\int_\Omega f\, d\mu = \lim_n \int_\Omega f_n\, d\mu$.

Preuve. $|f_n| \leq g$ implique $\int_\Omega |f_n|\, d\mu \leq \int_\Omega g\, d\mu < +\infty$, donc les f_n sont intégrables. $|f_n| \leq g$ implique $|f| \leq g$. On a donc la même conclusion pour f, d'où le point (i).
Pour le point (ii), posons $\varphi_n = \sup_{k\geq n} |f_k - f|$. (φ_n) est une suite décroissante de fonctions mesurables qui tend simplement vers 0. Or

$$\int_\Omega \varphi_0\, d\mu \leq \sup_{k\geq 0} \int_\Omega |f_k|\, d\mu + \int_\Omega |f|\, d\mu \leq 2 \int_\Omega g\, d\mu,$$

et donc $\displaystyle\lim_n \int_\Omega \varphi_n\, d\mu = 0$. Or $\varphi_n \geq |f_n - f|$. Le point (ii) en découle.

Pour le point (iii), on écrit que

$$\left|\int_\Omega f_n\,d\mu - \int_\Omega f\,d\mu\right| \leq \int_\Omega |f-f_n|\,d\mu \longrightarrow_{n\to+\infty} 0. \qquad \square$$

7.23. Applications aux séries. *Soit* $(u_n)=f(n)$ *une série absolument convergente. Si* $\Omega=\mathbb{N}$, $\mathcal{T}=\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *et* $\mu=\mu_d$ *est la mesure de comptage, on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_{\mathbb{N}} f\,d\mu_d.$$

Preuve. Posons $E_n=\{0,1,\dots n\}$ et $f_n=f\chi_{E_n}$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|f_n|\leq|f|=g$. De plus $\int_{\mathbb{N}}|f|\,d\mu_d=\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|<+\infty$, donc g est intégrable. Or,

$$\forall n\in\mathbb{N}, \qquad \int_{\mathbb{N}} f_n\,d\mu_d = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Le théorème de la convergence dominée entraîne donc que

$$\int_{\mathbb{N}} f\,d\mu_d = \sum_{n=0}^{\infty} u_d. \qquad \square$$

7.24. Théorème de la convergence dominée pour les séries. *Soit* $(a_n(m))_{n,m\in\mathbb{N}}$ *une famille de nombres complexes. On suppose qu'il existe une série* c_n *de réels positifs ou nuls qui converge et telle que, pour tout* $(n,m)\in\mathbb{N}^2$, *on ait* $|a_n(m)|\leq c_n$. *On suppose de plus que, pour tout* $n\in\mathbb{N}$, $\lim_{m\to+\infty} a_n(m)=b_n$. *Alors* $\sum|b_n|<+\infty$ *et*

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

7.7. Intégrabilité et "presque partout".

7.25. Définition. Sur $\mathcal{L}^1(\Omega)$, on définit la relation d'équivalence $f\mathcal{R}g$ si et seulement si $f-g=0$ p.p. On note $L^1(\Omega)=\mathcal{L}^1(\Omega)/\mathcal{R}$. $L^1(\Omega)$ est l'espace des classes de fonctions. Si $f\in L^1(\Omega)$, toutes les fonctions φ dans la classe f ont la même intégrale sur Ω. On note $\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega \varphi\,d\mu$.

7.26. Théorème.
- *$L^1(\Omega)$ est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel.*
- *L'intégrale $I : L^1(\Omega) \ni f \mapsto \int_\Omega f\, d\mu$ est une forme linéaire positive.*
- *$\left|\int_\Omega f\, d\mu\right| \leq \int_\Omega |f|\, d\mu$.*
- *$\|f\|_1 = \int_\Omega |f|\, d\mu$ définit une norme sur $L^1(\Omega)$.*

7.27. Extension du théorème de la convergence dominée. *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{C}$ qui converge simplement p.p. vers f. On suppose qu'il existe $g : \Omega \to \mathbb{R}^+$ intégrable telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ p.p. ; alors :*
(i) les f_n et f sont intégrables.
(ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |f - f_n|\, d\mu = 0$.
(iii) $\displaystyle\int_\Omega f\, d\mu = \lim_n \int_\Omega f_n\, d\mu$.

7.28. Théorème d'intégrabilité termes à termes des séries de fonctions. *Soit (u_n) une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que*

$$\sum \|u_n\|_1 < +\infty.$$

Alors :
- La série de terme général (u_n) converge absolument presque partout ;
- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est définie p.p et est intégrable ;

$$\int_\Omega f(x)\, d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\Omega u_n\, d\mu.$$

Preuve. On a $\int_\Omega \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|\, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\Omega |u_n|\, d\mu < +\infty$ donc $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| < +\infty$ p.p. ce qui implique que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge absolument presque partout.
$\int_\Omega |f(x)| d\mu(x) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_\Omega |u_n|\, d\mu < +\infty$, donc f est intégrable.
On applique ensuite le théorème de la convergence dominée à $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$ qui est majorée par la fonction intégrable
$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)|$. □

7.29. Corollaire. *$L^1(\Omega)$ est complet.*

Preuve. Tout espace vectoriel normé dans lequel toutes les séries normalement convergentes sont convergentes est un espace de Banach. □

7.8. Liens entre intégrales de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, intégrales de Riemann et intégrales généralisées.

7.30. Définition. Soit Ω un mesurable de $\mathbb{R}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mesurable. On appelle intégrale de Lebesgue sur Ω l'intégrale de f pour la mesure de Lebesgue induite sur Ω.

7.31. Théorème. *Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. Si f est intégrable au sens de Riemann, alors f est intégrable au sens de Lebesgue et les deux intégrales sont égales.*

Preuve. Notons $\int_a^b f(x)dx$ l'intégrale de Riemann de f et $\int_{[a,b]} f\,dm$ celle de Lebesgue. Quitte à raisonner sur les parties réelles et imaginaires de f, on peut supposer que f est à valeurs réelles.
On sait qu'une fonction Riemann intégrable est bornée et continue sauf sur un ensemble négligeable. En particulier une fonction Riemann intégrable sur un intervalle $[a,b]$ est Lebesgue intégrable.
Soit $\varepsilon > 0$. Soient φ une fonction en escalier inférieure à f, ψ une fonction en escalier supérieure à f telles que $\int_a^b(\psi(x) - \varphi(x))dx \leq \varepsilon$. φ et ψ sont alors des fonctions simples, et les intégrales de φ et ψ au sens de Riemann et de Lebesgue coïncident. On a donc

$$\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx$$

et

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_{[a,b]} \varphi\,dm \leq \int_{[a,b]} f\,dm \leq \int_{[a,b]} \psi\,dm = \int_a^b \psi(x)dx,$$

ce qui implique que

$$-\varepsilon \leq \int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))dx \leq \int_{[a,b]} f\,dm - \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))dx \leq \varepsilon.$$

Le résultat en découle en faisant tendre ε vers 0. □

7.32. Théorème. *Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{C}$ Riemann-intégrable sur tout compact. Alors, l'intégrale généralisée $\int_a^\infty f(x)dx$ est absolument convergente si et seulement si f est intégrable au sens de Lebesgue. On a alors $\int_a^\infty f(x)dx = \int_{[a,+\infty[} f\,dm$.*

Preuve. Le théorème de la convergence monotone implique que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^{a+n} f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_{[a,a+n]} f\,dm = \int_{[a,+\infty[} |f|\,dm.$$

On en déduit que f est Lebesgue-intégrable sur $[a,+\infty[$. On pose alors $f_n = f\chi_{[a,a+n]}$. En appliquant le théorème de la convergence dominée à f_n, on en déduit le théorème. □

7.33. Théorème. *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{C}$ Riemann-intégrable sur tout compact. Alors, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ est absolument convergente si et seulement si f est intégrable au sens de Lebesgue. On a alors $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b[} f\,dm$.*

Preuve. Analogue à la précédente. On prend une suite (b_n) dans $[a,b[$ qui converge vers b et on pose alors $f_n = f\chi_{[a,b_n]}$. En appliquant le théorème de la convergence dominée à f_n, on en déduit le théorème.
□

7.9 Intégrale fonction de la borne supérieure.

7.34. Proposition. *Soit $f : [a,b]\to\mathbb{C}$ intégrable. Soit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Alors F est continue sur $[a,b]$.*

Preuve. Soit $x\in[a,b]$ et (x_n) une suite de $[a,b]$ qui converge vers x. On applique le théorème de la convergence dominée à la suite de fonctions $f\chi_{[a,x_n]}$. □

- On montre que f est dérivable en tout point x où f est continue.
- On montre aussi, ce qui est beaucoup plus long et beaucoup plus difficile que F est presque partout dérivable et que $F' = f$ presque partout.

7.10 Intégrales dépendant d'un paramètre.

Le théorème suivant, quand l'intervalle d'intégration est compact, rend bien des services et est plus souple d'utilisation que le théorème de continuité ou de dérivation usuellement employé dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue. Il est donc à connaître, d'autant plus que la preuve de celui-ci est très élémentaire.

7.35. Théorème de continuité et de dérivation sous le signe somme pour un intervalle compact. *Soient $a < b$ deux réels, (E,d) un espace métrique, et $f : [a,b] \times E \to \mathbb{C}$. Si f est continue, alors l'application $F(x) = \int_a^b f(t,x)dt$ est continue sur E.*
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $f : [a,b] \times I \to \mathbb{C}$ est telle que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $[a,b] \times I$, alors l'application $F(x) = \int_a^b f(t,x)dt$ est de classe C^1 sur I et $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$.
Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et si $f : [a,b] \times U \to \mathbb{C}$ est continue et telle que $z \mapsto f(t,z)$ est holomorphe, alors l'application $F(z) = \int_a^b f(t,z)dt$ est holomorphe sur U et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(z) = \int_a^b \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(t,z)dt$.

Preuve. Soit (x_n) une suite de E convergeant vers x. L'ensemble $K = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact (*cf.* [Gourdon], p. 31). La fonction f est continue sur $[a,b] \times K$ qui est compact, donc f est uniformément continue.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tous t, t' dans $[a,b]$ et pour tous y, y' dans K, $|t-t'| \le \alpha$ et $d(y,y') \le \alpha$ impliquent $|f(t,y)-f(t',y')| \le \varepsilon$. En particulier, si $N \in \mathbb{N}$ est tel que, pour tout $n \ge N$, on ait $d(x_n,x) \le \alpha$, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \ge N \Rightarrow |F(x_n)-F(x)| \le \int_a^b |f(t,x_n)-f(t,x)|dt \le (b-a)\varepsilon.$$

On en déduit la continuité de F en x et le premier point du théorème.
Pour le second point, soit $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tels que $x+h \in I$. On a

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \int_a^b \frac{f(t,x+h)-f(t,x)}{h}dt = \int_a^b g(t,x,h)dt$$

avec

$$g(t,x,h) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,x+uh)du.$$

Le premier point montre que $h \mapsto g(t,x,h)$ est continue et tend vers $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ quand $h \to 0$. Le premier point montre encore que $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ admet une limite quand $h \to 0$ qui vaut $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$. Le deuxième point en découle.
La preuve pour l'holomorphie est analogue à la preuve du point précédent (on rappelle qu'une fonction est holomorphe en z si et seulement

si la limite quand $h \to 0$, h étant complexe de $\frac{F(z+h)-F(z)}{h}$ existe). La formule se prouve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Les autres théorèmes de continuité et de dérivation sous le signe somme sont des corollaires du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

7.35. Théorème de continuité sous le signe somme dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue. *Soient* (Ω, μ) *un espace mesuré, et* (E, d) *un espace métrique. Soit* $f : \Omega \times E \to \mathbb{C}$ *telle que :*
i. Pour tout $x \in E$, $t \mapsto f(t, x) \in L^1(\Omega)$
ii. Pour presque tout $t \in \Omega$, $x \mapsto f(t, x)$ *est continue.*
iii. Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ *telle que, pour presque tout* $t \in \Omega$ *et pour tout* $x \in \Omega$, $|f(t, x)| \leq g(t)$.
Alors l'application $F : x \mapsto \int_\Omega f(t, x) d\mu(t)$ *est continue.*

Preuve. Prendre une suite (x_n) qui converge vers x et appliquer le théorème de la convergence dominée à $f_n(t) = f(t, x_n)$. $\square$

7.36. Théorème de dérivation sous le signe somme dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue. *Soient* (Ω, μ) *un espace mesuré, et* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$. *Soit* $f : \Omega \times I \to \mathbb{C}$ *telle que :*
i. Pour tout $x \in E$, $t \mapsto f(t, x) \in L^1(\Omega)$
ii. Pour presque tout $t \in \Omega$, $x \mapsto f(t, x)$ *est dérivable.*
iii. Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ *telle que, pour presque tout* $t \in \Omega$ *et pour tout* $x \in \Omega$, $|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)| \leq g(t)$.
Alors l'application $F : x \mapsto \int_\Omega f(t, x) d\mu(t)$ *est dérivable, et*
$F'(x) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) d\mu(t)$.

Preuve. On prend une suite (h_n) qui tend vers 0 telle que, pour tout $x \in I$, $x + h_n \in I$. On a

$$\frac{F(x+h_n) - F(x)}{h_n} = \int_\Omega \frac{f(t, x+h_n) - f(t, x)}{h_n} dt.$$

De plus, comme dans la preuve du théorème 7.34, on a

$$g_n(t) = \frac{f(t, x+h_n) - f(t, x)}{h_n} = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x + uh_n) du.$$

Le théorème de la convergence dominée donne la convergence de $g_n(t)$ vers $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ et la majoration $|g_n(t)| \leq g(t)$. Une nouvelle application du théorème de la convergence dominée donne le résultat. $\square$

7.37. Théorème d'holomorphie sous le signe somme dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue. *Soient (Ω, μ) un espace mesuré, et U un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $f : \Omega \times U \to \mathbb{C}$ telle que :*
i. Pour tout $z \in U$, $t \mapsto f(t,z) \in L^1(\Omega)$
ii. Pour presque tout $t \in \Omega$, $z \mapsto f(t,z)$ est holomorphe
iii. Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que, pour presque tout $t \in \Omega$ et pour tout $z \in U$, $|f(t,z)| \leq g(t)$.
Alors l'application $F : z \mapsto \int_\Omega f(t,z)d\mu(t)$ est holomorphe dans U, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(z) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial z^n}(t,z)d\mu(t)$.

Preuve. On prend une suite (h_n) de nombres complexes qui tend vers 0 telle que, pour tout $z \in U$, $z + h_n \in U$. On a

$$\frac{F(z+h_n) - F(z)}{h_n} = \int_\Omega \frac{f(t,z+h_n) - f(t,z)}{h_n} dt.$$

De plus, comme dans la preuve du théorème 7.34, on a

$$g_n(t) = \frac{f(t,z+h_n) - f(t,z)}{h_n} = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(t, z+uh_n)du.$$

Pour poursuivre, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme. *Si φ est holomorphe dans un voisinage du disque de centre z et de rayon r, on a*

$$\varphi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z,r)} \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^2}.$$

Preuve du lemme. En effet, φ' est holomorphe donc

$$\varphi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z,r)} \frac{\varphi'(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi'(z + re^{i\theta})d\theta$$

Si $\phi(\theta) = \frac{1}{2\pi}\varphi(z + re^{i\theta})$, alors $\phi'(\theta) = \frac{1}{2\pi}\varphi'(z+re^{i\theta})ire^{i\theta}$. En particulier,

$$\varphi'(z) = \int_0^{2\pi} \frac{\phi'(\theta)}{ire^{i\theta}}d\theta = \underbrace{\left[\frac{\phi(\theta)}{ire^{i\theta}}\right]_0^{2\pi}}_{=0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\phi(\theta)}{re^{i\theta}}d\theta}_{= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z,r)} \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^2}}. \quad \square$$

Revenons à la preuve du théorème. Soit $r > 0$ tel que $\overline{D(z,r)} \subset U$. Il existe un rang N à partir duquel $z + h_n \in D(z, r/2)$. Le lemme précédent donne, pour $u \in [0,1]$ et $n \geq N$,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(t, z+uh_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z,r)} \frac{f(t,\zeta)}{(\zeta-(z+uh_n))^2}d\zeta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(t,z+uh_n+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}d\theta,$$

donc

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z}(t,z+uh_n)\right| \leq \frac{g(t)}{r}.$$

Le théorème de la convergence dominée donne la convergence de $g_n(t)$ vers $\frac{\partial f}{\partial z}(t,z)$ et la majoration $|g_n(t)| \leq \frac{g(t)}{r}$. Une nouvelle application du théorème de la convergence dominée donne le résultat. $\square$

8. Intégrales multiples.

8.1. Tribus produits.

8.1 **Définition.** Soient X et Y deux ensembles, et $f : X \times Y \to \mathbb{C}$. Soit $E \subset X \times Y$. On appelle *section de E en x* l'ensemble

$$E_x = \{y \in Y,\ (x,y) \in E\} \subset Y$$

et *section de E en y* l'ensemble

$$E^y = \{x \in X,\ (x,y) \in E\} \subset X.$$

On note $f_x : y \in E_x \mapsto f(x,y)$ et $f^y : x \in E^y \mapsto f(x,y)$.

Nous avons les propriétés suivantes :
- $(E^c)_x = (E_x)^c$, $(E^c)^y = (E^y)^c$.
- $(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n)_x = \bigcup_{n=0}^{\infty}(E_n)_x$, $(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n)^y = \bigcup_{n=0}^{\infty}(E_n)^y$.
- $(\chi_E)_x = \chi_{E_x}$.
- $(f^{-1}(D))_x = f_x^{-1}(D)$.
- $(A \times B)_x = B$ ou $\emptyset$.
- $E \cap F \neq \emptyset$ implique qu'il existe x tel que $E_x \cap F_x \neq \emptyset$.

8.2. Définition. Soient $(X,\mathcal{A})$ et $(Y,\mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On appelle *rectangle* tout ensemble de la forme $A\times B$ où $A\in\mathcal{A}$ et $B\in\mathcal{B}$. L'ensemble des rectangles est noté $\mathcal{R}$. Il est stable par intersection finie.
On appelle *tribu produit de* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ et on note $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ la tribu $\sigma(\mathcal{R})$.

8.2. Mesure produit.

8.3. Lemme. *Soient* $(X,\mathcal{A})$ *et* $(Y,\mathcal{B})$ *deux espaces mesurables.*
(i) $E\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\Longrightarrow \forall x\in X,\quad \forall y\in E,\quad E_x\in\mathcal{B}$ *et* $E^y\in\mathcal{A}$.
(ii) *Soit* $f:(X\times Y,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})\to(\Omega,\mathcal{T})$ *mesurable, alors* $\forall x\in X$ *et* $\forall y\in Y$, f_x *et* f^y *sont mesurables.*

Preuve. Soit $\mathcal{F}=\{E\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}/\ \forall x\in X,\ E_x\in\mathcal{B}\}$. On a $\mathcal{F}\subset\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$.
Si $\mathcal{F}$ est une tribu contenant $\mathcal{R}$, alors $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\subset\mathcal{F}$.
Montrons donc que $\mathcal{F}$ est une tribu sur $X\times Y$.
$\emptyset\in\mathcal{F}$ car $\emptyset_x=\emptyset\in\mathcal{B}$.
Si $E\in\mathcal{F}$, alors $E^x\in\mathcal{B}$. On a $(E^c)_x=(E_x)^c\in\mathcal{B}$ donc $E^c\in\mathcal{F}$.
Si $(E_n)_n$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$, alors

$$\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}E_n\right)_x=\bigcup_{n=0}^{\infty}(E_n)_x\in\mathcal{B},$$

donc $\bigcup_{n=0}^{\infty}E_n\in\mathcal{F}$. Ceci achève de montrer que $\mathcal{F}$ est une tribu.

Montrons maintenant que $\mathcal{R}\subset\mathcal{F}$.
Si $A\times B\in\mathcal{R}$, alors $(A\times B)_x=B$ ou $\emptyset$ est dans $\mathcal{B}$. Ceci prouve bien que $\mathcal{R}\subset\mathcal{F}$. Le point (i) est donc prouvé.

Montrons (ii). Soit $D\in\mathcal{T}$, alors $(f_x^{-1})(D)=(f^{-1}(D))_x$, d'où le résultat. □

8.4. Lemme. *Soient* $(X,\mathcal{A},\mu)$ *et* $(Y,\mathcal{B},\nu)$ *deux espaces mesurés où* μ *et* ν *sont* $\sigma-$*finies. Alors* $x\mapsto\nu(E_x)$ *et* $y\mapsto\mu(E^y)$ *sont mesurables si* $E\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$.

Preuve. Les applications sont bien définies d'après le lemme 8.3. Nous avons besoin de la notion de prétribu :

8.5. Définition. Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T}\subset\mathcal{P}(\Omega)$. $\mathcal{T}$ est une *prétribu* sur Ω si et seulement si :

(i) $\Omega \in \mathcal{T}$.
(ii) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \qquad A \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c \in \mathcal{T}$.
(iii) Pour toute suite (A_n) d'ensembles deux à deux disjoints de $\mathcal{T}$, on a $(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) \in \mathcal{T}$.

On vérifie qu'une intersection de prétribus est encore une prétribu. En particulier, on peut définir la prétribu engendrée par une famille $\mathcal{C}$ d'ensembles comme étant l'intersection de toutes les prétribus contenant $\mathcal{C}$. On la note $\pi(\mathcal{C})$.

8.6. Lemme de Lusin. *Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est non vide et stable par intersection finie, alors la prétribu engendrée par $\mathcal{C}$ coïncide avec la tribu engendrée par $\mathcal{C}$. En d'autres termes, $\pi(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.*

Preuve. Soit $\mathcal{E}$ la prétribu engendrée par $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{E}_1 = \{B \in \mathcal{E} / \, B \cap A \in \mathcal{E}, \, \forall A \in \mathcal{C}\}$. On vérifie que $\mathcal{E}_1$ est une prétribu contenant $\mathcal{C}$ et contenue dans $\mathcal{E}$, et donc que $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}$:
- $\mathcal{E}_1$ contient $\mathcal{C}$ car $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie
- $\emptyset \in \mathcal{E}_1$ est immédiat.
- Si $B \in \mathcal{E}_1$, alors $B \cap A \in \mathcal{E}$ pour tout $A \in \mathcal{C}$. Montrons que $B^c \in \mathcal{E}_1$, c'est-à-dire que, pour tout $A \in \mathcal{C}$, $B^c \cap A \in \mathcal{E}$. Soit $A \in \mathcal{C}$. On a $B \cap A \in \mathcal{E}$ et $(B \cap A) \cap A^c = \emptyset$. On en déduit que $(B \cap A) \cup A^c \in \mathcal{E}$ car $A^c \in \mathcal{E}$, et donc que $[(B \cap A) \cup A^c]^c = (B^c \cup A^c) \cap A = B^c \cap A \in \mathcal{E}$, ce qu'il fallait démontrer.
- Si (B_n) est une suite d'ensembles deux à deux disjoints de $\mathcal{E}_1$, pour tout $A \in \mathcal{C}$, la suite $(B_n \cap A)$ est une suite d'ensembles deux à deux disjoints dans $\mathcal{E}$, donc $(\bigcup B_n) \cap A = \bigcup (B_n \cap A) \in \mathcal{E}$ ce qui montre que $\bigcup B_n \in \mathcal{E}_1$.

Soit $\mathcal{E}_2 = \{B \in \mathcal{E} / \, B \cap B' \in \mathcal{E}, \, \forall B' \in \mathcal{E}\}$. On prouve exactement comme pour $\mathcal{E}_1$ que $\mathcal{E}_2$ est une prétribu. De plus, $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}_2$. En effet, si $B \in \mathcal{C}$, on a $B \cap B' \in \mathcal{E}$ pour tout $B \in \mathcal{E}$ puisque $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1$. On en déduit comme auparavant que $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$.

De tout cela, on déduit que $\mathcal{E}$ est une prétribu stable par intersection finie. On en déduit que $\mathcal{E}$ est une tribu : soit (A_n) une suite d'éléments de $\mathcal{E}$. La suite (A'_n) définie par $A'_0 = A_0$, $A'_1 = A_0 \setminus A_1 = A_0 \cap A_1^c$, $\ldots$, $A'_n = A_n \setminus (A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}) = A_n \cap A_0^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c$ est encore une suite de $\mathcal{E}$ (puisque $\mathcal{E}$ est stable par intersection finie), et donc $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} A'_n \in \mathcal{E}$. Ceci achève de prouver que $\mathcal{E}$ est une tribu. Le lemme de Lusin est donc prouvé. $\square$

Remarque. Le lemme de Lusin est faux si $\mathcal{C}$ n'est pas stable par intersection finie. Si par exemple $\Omega = [0,3] \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{C} =]0,t[\cup]t,3[$ pour $t = 1,2$, alors $\pi(\mathcal{C}) = \{\emptyset, \{0,1,3\}, \{0,2,3\}, \{0,1,3\}^c, \{0,2,3\}^c, \Omega\}$ et $\{0,1,2,3\}$ est dans $\sigma(\mathcal{C})$ et pas dans $\pi(\mathcal{C})$.

Remarque. Dans la construction initiale de la famille des ensembles mesurables pour la mesure de Lebesgue, nous avions construit dans un premier temps une prétribu. Ensuite, comme la famille des ensembles mesurables était stable par intersection finie, nous en avons déduit que la famille des mesurables formait une tribu.

Revenons à la preuve du lemme 8.4. Supposons tout d'abord que la mesure ν est finie. Posons

$$\mathcal{E} = \{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} /\ x \mapsto \nu(E_x) \text{ est mesurable}\}.$$

On a $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. La famille $\mathcal{R}$ des rectangles est stable par intersection finie. Il découle du lemme de Lusin que $\pi(\mathcal{R}) = \sigma(\mathcal{R})$.
On a $\mathcal{R} \subset \mathcal{E}$ car, si $E \in \mathcal{R}$, alors $E = A \times B$ où $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$, et, $\forall x \in X$, $\nu(E_x) = 0$ si $x \notin A$ et $\nu(E_x) = \nu(B)$ si $x \in A$, ce qui implique que $E \in \mathcal{E}$.
Montrons que $\mathcal{E}$ est une prétribu.
- On a $X \times Y \in \mathcal{E}$, car $x \mapsto \nu(E_x)$ est constante et vaut $\nu(Y)$.
- Si $E \in \mathcal{E}$, alors $x \mapsto \nu(E_x)$ est mesurable, ce qui implique que $x \mapsto \nu((E^c)_x) = \nu((E_x)^c) = \nu(Y) - \nu(E_x)$ est mesurable, donc que $E^c \in \mathcal{E}$.
Si (E_n) est une suite de $\mathcal{E}$ d'ensembles deux à deux disjoints, alors

$$\forall x \in X, \qquad \nu\left(\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right)_x\right) = \nu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (E_n)_x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu((E_n)_x)$$

car les $(E_n)_x$ sont deux à deux disjoints. On en déduit que l'application

$$x \mapsto \nu\left(\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right)_x\right)$$

est limite simple de la suite d'applications mesurables

$$x \mapsto \nu\left(\bigcup_{n=0}^{N} (E_n)_x\right) = \sum_{n=0}^{N} \nu((E_n)_x)$$

quand $N \to +\infty$, donc qu'elle est mesurable. Ceci montre que $\mathcal{E}$ est une prétribu et achève de montrer le lemme 8.4 quand la mesure ν est finie.

Si la mesure ν est $\sigma-$finie, alors $Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n$ où les Y_n sont deux à deux disjoints, mesurables. Posons $\nu_n(E_x) = \nu(E_x \cap Y_n) = \nu((E \cap Y_n)_x)$, alors $\nu(E_x) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu_n(E_x)$ et où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \nu_n(E_x)$ est mesurable. On en déduit que $x \mapsto \nu(E_x)$ est une limite simple de fonctions mesurables, donc que c'est une fonction mesurable. Le lemme 8.4 est donc prouvé si ν est $\sigma-$finie. $\square$

8.7. Théorème et Définition. *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *et* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *deux espaces mesurés avec* μ *et* ν *deux mesures* $\sigma-$*finies. Il existe une unique mesure, notée* $\mu \otimes \nu$*, telle que*

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \forall B \in \mathcal{B}, \quad (\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

On a

$$\forall E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \qquad (\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y).$$

$\mu \otimes \nu$ *est appelée la mesure produit de* μ *et de* ν*. Elle est* $\sigma-$*finie. De plus, elle est finie si et seulement si* μ *et* ν *sont finies.*

Preuve. Notons $\lambda_1(E) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x)$ et $\lambda_2(E) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y)$. *Montrons tout d'abord que* λ_1 *et* λ_2 *sont deux mesures sur* $X \times Y$ *et que, pour tout* $(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, $\lambda_1(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = \lambda_2(A \times B)$. Il est clair que $\lambda_1(\emptyset) = 0$. Si (E_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ deux à deux disjoints, alors

$$\begin{aligned}\lambda_1\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) &= \int_X \nu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (E_n)_x\right) d\mu(x) \\ &= \int_X \sum_{n=0}^{\infty} \nu\left((E_n)_x\right)\, d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_X \nu((E_n)_x) d\mu(x),\end{aligned}$$

car les $x \mapsto \nu((E_n)_x)$ sont mesurables positives, et donc

$$\lambda_1\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_1(E_n).$$

La preuve pour λ_2 est identique. Enfin, si $(A,B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$,

$$\begin{aligned}\lambda_1(A \times B) &= \int_X \nu((A \times B)_x) d\mu(x) \\ &= \int_X \nu(B)\chi_A(x) d\mu(x) = \nu(B) \int_X \chi_A d\mu = \nu(B)\mu(A).\end{aligned}$$

De même, $\lambda_2(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.

Montrons l'unicité d'une telle mesure, c'est-à-dire que si λ_1 et λ_2 sont deux mesures telles que $\lambda_1(A \times B) = \lambda_2(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ alors λ_1 et λ_2 sont égales sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Soit $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(X_n) < +\infty$ et où les (X_n) sont disjoints. Posons $A_n = \bigcup_{k=0}^{n} X_k$, alors (A_n) est une suite croissante de X, X est la réunion des A_n et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) < +\infty$. De même, on peut écrire $Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$ où la suite (B_n) est croissante et $\nu(B_n) < +\infty$. On prend, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < \mu(A_n) < +\infty$ et $0 < \nu(B_n) < +\infty$. Soit $E \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ et $\Omega_n = A_n \times B_n$. Définissons

$$P_n(E) = \lambda_1(E \cap \Omega_n) \text{ et } P'_n(E) = \lambda_2(E \cap E_n).$$

Alors, pour tout $A \in \mathcal{A}$ et pour tout $B \in \mathcal{B}$, on a

$$P_n(A \times B) = P'_n(A \times B).$$

De plus, $\lim_{n\to+\infty} P_n(E) = \lambda_1(E)$ et $\lim_{n\to+\infty} P'_n(E) = \lambda_2(E)$. On utilise le lemme suivant :

Lemme. *Si $(\Omega, \mathcal{T})$ est un espace mesurable avec $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{A})$ et où $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie, alors, si μ et ν sont deux mesures finies sur $(\Omega, \mathcal{T})$ qui coïncident sur $\mathcal{A}$, elles coïncident sur $\mathcal{T}$.*

Preuve du lemme. Soit $\mathcal{E} = \{X \in \mathcal{T} / \ \mu(X) = \nu(X)\}$. On vérifie facilement que $\mathcal{E}$ est une prétribu. Le lemme de Lusin permettra alors de conclure que $\mathcal{E} = \mathcal{T}$, ceci prouve le lemme. $\square$

Revenons à la preuve du théorème. Du lemme, on déduit que, pour tout n, $P_n = P'_n$, et donc $\lambda_1 = \lambda_2$. $\square$

8.3. Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

Comme tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est une réunion d'ouverts de la forme $]a_n, b_n[\times]c_n, d_n[$ (ces pavés ne sont pas nécessairement disjoints), on en déduit que, si $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ désigne la famille des boréliens de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ la famille des boréliens de $\mathbb{R}$ que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. On définit la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ en la définissant d'abord sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^2$ en posant $m_{\mathbb{R}^2} = m_{\mathbb{R}} \otimes m_{\mathbb{R}}$. Puis on l'étend à l'ensemble des mesurables de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire à l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ qui sont réunion d'un borélien et d'un ensemble négligeable. Si on note $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^2}$ la tribu des mesurables de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ la tribu des mesurables de $\mathbb{R}$, on n'a pas par contre $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^2} = \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$. En effet, si $A \notin \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, alors $A \times \{0\} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^2}$ (c'est un ensemble négligeable), mais $A \times \{0\} \notin \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ (sinon, d'après le lemme 8.3, $(A \times \{0\})^0 = A \in \mathcal{L}_R$). On définit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

8.4. Intégrales doubles.

8.8. Théorème de Tonelli. *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés où μ et ν sont $\sigma-$finies. Soit $f : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \longrightarrow [0, +\infty]$ mesurable. Alors les fonctions $x \in X \mapsto \int_Y f(x, y)\, d\nu(y)$ et $y \in Y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ sont mesurables et*

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$
$$= \int_Y \left(\int_X (fx, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Preuve. D'après le lemme 8.3, les intégrales $\int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$ et
$\int_Y \left(\int_X (fx, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$ existent.

Premier temps. Si $f = \chi_E$ où $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ alors

$$\int_{X \times Y} \chi_E d(\mu \otimes \nu) = (\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x)$$
$$= \int_X \left(\int_Y \chi_E(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X \chi_E(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Deuxième temps. Par linéarité, le résultat est encore vrai si f est une fonction simple.

Troisième temps. Si f est mesurable positive, il existe une suite croissante de fonctions simples s_n qui converge vers f. Le théorème de convergence monotone donne le résultat. □

8.9. Théorème de Fubini. *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés. Soit $f : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to \mathbb{C}$, intégrable pour $\mu \otimes \nu$; alors :*
- pour presque tout $x \in X$, f_x est intégrable
- pour presque tout $y \in Y$, f^y est intégrable
- La fonction $x \in X \mapsto \int_Y f(x,y) d\nu(y)$ est définie presque partout et intégrable
- La fonction $y \in Y \mapsto \int_X f(x,y) d\mu(x)$ est définie presque partout et intégrable
et on a :

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu \otimes \nu)(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x) =$$
$$= \int_Y \left(\int_X f(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Preuve. En considérant les parties réelles et imaginaires de f, on peut donc supposer que f est à valeurs réelles. On écrit ensuite que $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$. Comme $0 \leq f^+ \leq |f|$ et $0 \leq f^- \leq |f|$, on en déduit que f^+ et f^- sont intégrables. On leur applique le théorème de Tonelli. Les quatre premiers points sont donc clairs. Le dernier point s'obtient par linéarité à l'aide de la formule $f = f^+ - f^-$.

□

8.10. Proposition. *Sous les mêmes hypothèses que précédement, si l'un des nombres*

$$\int_X \left(\int_Y |f(x,y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) \;\; ou \;\; \int_Y \left(\int_X |f(x,y)| d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

est fini, alors le théorème de Fubini s'applique.

Preuve. C'est une application directe du théorème de Tonelli. □

Nous terminons en énoncant le théorème suivant (la preuve se trouve dans le livre de Gramain, Intégration, Ed. Hermann) :

Théorème de changement de variable. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L^1(U)$. Soit $\varphi : U' \to U$ un C^1-difféomorphisme. Alors*

$$\int_{U'} f(\varphi(t))|J\varphi(t)|dt = \int_U f(x)dx,$$

où $J\varphi(t)$ est le jacobien au point $t \in U'$ de la fonction φ.