MATH421 - Examen du 13 mai 2015

La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la rigueur de l'expression.

(2 pts) **Questions de cours.** Étant donnée une fonction $f :]0,1] \to \mathbb{R}$, quand dit-on que l'intégrale $\int_0^1 f$ converge ?

(6 pts) **Exercice 1.** Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{(x^3+1)e^{-x}}{\sqrt[4]{x-\sin(x)}}$.

1.a. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ est-elle convergente ?

1.b. On note $g_\alpha : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g_\alpha(x) = x^\alpha e^{-x}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'existe $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f \sim_{+\infty} -g'_{\alpha_0}$.

1.c. En déduire un équivalent, pour y au voisinage de $+\infty$, de la fonction $y \mapsto \int_y^{+\infty} f$.

(10 pts) **Exercice 2.** Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \log(x)$.

2.a. Expliquer pourquoi, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, existe une et seule primitive de f^k (la puissance $k$ième de f), valant 0 en 1.

On note $F_k : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ cette primitive.

2.b. Au moyen d'une intégration par parties, calculer $F_1 : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

2.c. À l'aide d'une preuve par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, montrer que F_k est une combinaison linéaire de la famille de fonctions $(xf^k(x), xf^{k-1}(x), \cdots, xf(x), x, 1)$.

2.d. Montrer à l'aide de la question précédente que quel que soit $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 f^k$ converge. Cette intégrale converge-t-elle absolument ?

2.e. Soit $k \in \mathbb{N}$. Quelle est la limite $\lim_{x\to 0, x>0} \sqrt{x}|f^k(x)|$? Déduire directement de cette limite que l'intégrale $\int_0^1 f^k$ converge.

(4 pts) **Exercice 3.** Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $f_\alpha :]0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_\alpha(x) = \dfrac{\log(x)}{\log^\alpha(x+1)}$.

Dire pour quelles valeurs de α l'intégrale $\int_0^1 f_\alpha$ converge.