MATH421 - Seconde session - 23 juin 2015

La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la rigueur de l'expression.

(14 pts) **Exercice 1.** Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ et $f, g : [x, y] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables. On suppose que f est décroissante et que quel que soit $t \in [x, y]$, $f(t) \geq 0$. On note

$$G : [x, y] \ni t \mapsto \int_x^t g$$

et

$$M := \inf_{t \in [x,y]} G(t), \ \ m := \sup_{t \in [x,y]} G(t).$$

1. Montrer que $m, M \in \mathbb{R}$ et qu'existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{t \to x, t > x} f(t) = \ell$.

2. Dans cette question on suppose que f est une fonction en escalier sur $[x, y]$. Soit alors $\sigma = (t_0 = x, t_1, \cdots, t_n = y)$ une subdvision de $[x, y]$ telle que pour tout $i = 0, \cdots, n-1$, la restriction de f à $]t_i, t_{i+1}[$ soit constante et égale au réel c_i.

2.a. Montrer, en remarquant que $G(t_0) = G(x) = 0$, que

$$\int_x^y fg = c_{n-1} \cdot G(t_n) + \sum_{i=0}^{n-2} (c_i - c_{i+1}) \cdot G(t_{i+1}).$$

2.b. Déduire de la question précédente que

$$c_0 \cdot m \leq \int_x^y fg \leq c_0 \cdot M.$$

Conclure que

$$\ell \cdot m \leq \int_x^y fg \leq \ell \cdot M.$$

3. On ne suppose plus ici que f est en escalier.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $\sigma = (t_0 = x, t_1, \cdots, t_n = y)$ la subdvision régulière de $[x, y]$ de pas $\dfrac{y-x}{n}$ et ϕ_n la fonction en escalier sur $[x, y]$ qui vaut $f(t_i)$ sur $]t_{i-1}, t_i]$, pour $i = 1, \cdots, n$, et $f(t_0) = f(x)$.

3.a. Montrer que pour tout $t \in [x, y]$, $\phi_n(t) \leq f(t)$.

3.b. Montrer que

$$|\int_x^y fg - \int_x^y \phi_n g| \leq \max_{t \in [x,y]} |g(t)| \cdot \frac{y-x}{n} \cdot (f(x) - f(y)).$$

En déduire que $\lim_{n \to \infty} \int_x^y \phi_n g = \int_x^y fg$.

3.c. D'après la question 2.b, remarquer que $f(x + \dfrac{y-x}{n}) \cdot m \leq \int_x^y \phi_n g \leq f(x + \dfrac{y-x}{n}) \cdot M$. Déduire alors de la question 3.b que

$$\ell \cdot m \leq \int_x^y fg \leq \ell \cdot M$$

3.d. Déduire de la question précédente qu'existe $c \in [x,y]$ tel que

$$\int_x^y fg = \ell \cdot \int_x^c g \qquad (*)$$

(8 pts) **Exercice 2.** On suppose dans cet exercice que $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a < b$, $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ sont deux fonctions localement intégrables sur $[a,b[$, que f est décroissante et de limite nulle en b (et donc f est à valeurs positives). On suppose enfin que $G : x \mapsto \int_a^x g$ est bornée sur $[a,b[$. On note alors $\mu \geq 0$ un majorant de $|G|$ sur $[a,b[$.

1. Soient $x, y \in [a,b[$, $x < y$. Montrer, grâce à l'égalité $(*)$ de la question 3.d de l'Exercice 1, qu'existe $c \in [x,y]$ tel que

$$\int_x^y fg = \lim_{t \to x, t > x} f(t) \Big(\int_a^c g - \int_a^x g \Big).$$

En déduire que $| \int_x^y fg| \leq 2\mu \cdot \lim_{t \to x, t > x} f(t)$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Déduire de la question précédente qu'existe $\beta \in [a,b[$ tel que

$$\forall x, y \geq \beta, \; | \int_x^y fg| \leq 2\mu \cdot \varepsilon.$$

3. Conclure que l'intégrale $\int_a^b gf$ est convergente.

4. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}$ est convergente.