MATH321 - Examen du 11 février 2015

La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la rigueur de l'expression.

NB. Dans tout ce qui suit a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Questions de cours 1. Donner la définition d'une fonction φ en escalier sur $[a,b]$.

Question de cours 2. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Donner quatre définitions de la Riemann-intégrabilité de f.

Question de cours 3. Montrer que si une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, elle est bornée.

Question de cours 4. Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0,+\infty[$, mais est uniformément continue sur $[1,+\infty[$.

Question de cours 5. Montrer que si une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, elle est Riemann-intégrable (on admettra le théorème de Heine).

Exercice. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$.

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement vers la fonction** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ lorsque

$$\forall x \in [a,b],\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément vers la fonction** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall x \in [a,b],\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

On note dans chacun de ces deux cas la fonction f par $\underset{n\to\infty}{\mathscr{L}im}\, f_n$.

1. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.

2. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(x) = n,\ \text{si } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \quad \text{et} \quad f(x) = 0,\ \text{si } x \in [0,1] \setminus [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}].$$

Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément vers une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$?

3. On suppose dans cette question qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ converge uniformément vers une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et que les fonctions f_n sont Riemann-intégrables.

3.a. Montrer que la fonction f est alors Riemann-intégrable.

3.b. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$, c'est-à-dire que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \underset{n\to\infty}{\mathscr{L}im}\, f_n.$$

4. Lorsque la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une convergence simple, a-t-on encore en général le résultat de la question 3.b ? Donner une preuve en cas de réponse positive et un contre-exemple en cas de réponse négative.