MATH421 - Examen du 14 février 2017

La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la rigueur de l'expression.

NB. Dans tout ce qui suit a et b sont deux réels tels que $a < b$.

(1pt) **Questions de cours 1.** Donner la définition d'une fonction en escalier $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et de son intégrale.

(2pts) **Question de cours 2.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Donner trois définitions possibles de la Riemann-intégrabilité de f.

(2pts) **Question de cours 3.** Montrer que si une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est Riemann-intégrable, elle est bornée.

(5pts) **Exercice 1.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer à l'aide du théorème de Heine que f est Riemann-intégrable.

(4pts) **Exercice 2.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall x \in [a,b],\ \ 0 \leq f(x) \ \text{ et } \ \int_a^b f = 0.$$

Montrer que $\forall x \in [a,b],\ \ f(x) = 0$.

Exercice 3. Soient $g, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions Riemann-intégrables. On suppose que :

$$\exists m > 0,\ \forall x \in [a,b],\ \ m \leq f(x).$$

(3pts) **1.** Montrer qu'existent deux suites de fonctions en escalier $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel $M > 0$ tels que

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b],\ \ |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \theta_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b \theta_n = 0$,

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b],\ \ m \leq \varphi_n(x) \leq M$.

(3pts) **2.** À l'aide de la question précédente, montrer que la fonction $1/f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable.

(1pt) **3.** En conclure que la fonction $g/f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable.