MATH421 - Examen du 16 février 2016

La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la rigueur de l'expression.

NB. Dans tout ce qui suit a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Questions de cours 1. Donner la définition d'une fonction en escalier $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et de son intégrale.

Question de cours 2. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer que f est Riemann-intégrable.

Question de cours 3. Énoncer le théorème de changement de variables.

Problème. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée (c'est-à-dire minorée et majorée sur $[a,b]$). Une subdivision $\sigma = (x_i)_{i=0,\cdots,n}$ de l'intervalle $[a,b]$ étant donnée, on note [*]

$$s_\sigma(f) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \quad \text{et} \quad S_\sigma(f) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1},x_i]} f.$$

1. Soit $\sigma = (x_i)_{i=0,\cdots,n}$ une subdivision de $[a,b]$. Montrer qu'existent deux fonctions en escalier $g, h \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}([a,b])$ telles que $g \leq f \leq h$ et $\int_a^b g = s_\sigma(f)$, $\int_a^b h = S_\sigma(f)$.

2. Montrer que quelles que soient les subdivisions σ et τ de $[a,b]$, on a

$$s_\sigma(f) \leq s_{\sigma\cup\tau}(f) \leq S_{\sigma\cup\tau}(f) \leq S_\tau(f).$$

On note

$$d(f) := \sup\{s_\sigma(f); \sigma \text{ subdivision de } [a,b]\} \quad \text{et}$$
$$D(f) := \inf\{S_\tau(f); \tau \text{ subdivision de } [a,b]\}.$$

3. Montrer que $d(f) \leq D(f)$.

4. On suppose dans cette question que $d(f) = D(f)$ [†].

4.a. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'existent deux subdivisions σ et τ de $[a,b]$ telles que

$$S_\tau(f) - s_\sigma(f) \leq \varepsilon.$$

4.b. À l'aide de la question 1 montrer que f est Riemann-intégrable.

4.c. À l'aide de la question 1 montrer que

$$d(f) \leq \sup\{\int_a^b g;\ g \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}^-([a,b])\} \quad \text{et} \quad \inf\{\int_a^b h;\ h \in \mathscr{E}_{\mathbb{R}}^+([a,b])\} \leq D(f).$$

$*$. Les quantités $s_\sigma(f)$ et $S_\sigma(f)$ s'appellent respectivement les sommes inférieures et supérieures de Darboux.

†. On dit dans ce cas que f est Darboux-intégrable.

En déduire que $\int_a^b f = d(f) = D(f)$.

5. On suppose réciproquement dans cette question que f est Riemann-intégrable et on fixe $\varepsilon > 0$. On sait alors qu'existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que pour toute subdivision pointée

$$(\sigma, \xi) = ((x_i)_{i=0,\cdots,n}, (\xi_i)_{i=1,\cdots,n}), \;\; \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

de $[a,b]$, de pas inférieur à η_ε, la somme de Riemann $R(\sigma, \xi, f) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$ vérifie

$$|\int_a^b f - R(\sigma, \xi, f)| \leq \varepsilon. \tag{1}$$

5.a. Montrer que pour toute subdivision $\sigma = (x_i)_{i=0,\cdots,n}$ de $[a,b]$, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, existe $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, tel que

$$0 \leq f(\xi_i) - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \leq \varepsilon.$$

En notant $\xi := (\xi_1, \cdots, \xi_n)$, la suite finie des ξ_i ainsi obtenus, en déduire que

$$0 \leq R(\sigma, \xi, f) - s_\sigma(f) \leq \varepsilon(b-a).$$

De même montrer qu'existe $\xi' := \{\xi'_1, \cdots, \xi'_n\}$, avec $\xi'_i \in [x_{i-1}, x_i]$, tel que

$$0 \leq S_\sigma(f) - R(\sigma, \xi', f) \leq \varepsilon(b-a).$$

5.b. Déduire de la question précédente et de l'inégalité (1) que si le pas d'une subdivision σ est $\leq \eta_\varepsilon$, on a

$$0 \leq S_\sigma(f) - s_\sigma(f) \leq 2\varepsilon(1 + b - a).$$

5.c. En conclure que $d(f) = D(f)$.

6. Quel énoncé a-t-on établi entre la Riemann-intégrabilité et la Darboux-intégrabilité ?