C. R. Acad. Sci. Paris, t. 323, Série I, p. 143-146, 1996
Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

Sur les hypothèses du théorème de Sard pour le lieu critique de rang zéro

Georges COMTE

Université de Provence, CMI, 39, rue Joliot-Curie,
Technopole du Chateau Gombert, 13453 Marseille CEDEX 13, France.

Résumé. Dans cette Note, après avoir remarqué que l'on peut affiner les hypothèses – énoncées par Norton et Bates – du théorème de Sard pour le lieu critique de rang zéro, on donne une construction montrant que les énoncés améliorés sont les meilleurs possibles.

On the smoothness hypothesis in Sard's theorem about the rank-0 set

Abstract. *In this Note, after remarking that one can improve on the smoothness hypotheses stated by Norton and Bates for Sard's theorem about the rank-0 set, we give a construction showing that the improved hypotheses are the best possible.*

Introduction

Soient $f : \mathbb{R}^m \xrightarrow{C^p} \mathbb{R}^n$ ($m > n \geq 1$ et $p \geq 1$ trois entiers), $C_f^0 = \{x \in \mathbb{R}^m | Df(x) = 0\}$ son lieu critique de rang zéro. Lorsque pour tout compact K de $\mathbb{R}^m$ il existe $M_K > 0$ tel que : $\forall\, x,\, y \in K$, $\|D^p f(x) - D^p f(y)\| \leq M_K |x-y|^\alpha$, on dit que f est de classe $C^{p+\alpha}$ pour $\alpha \in]0,\, 1[$, et de classe $C^{p,1}$, si $\alpha = 1$.

On note $\mathcal{H}^t$, $t > 0$, la mesure t-dimensionnelle de Hausdorff sur $\mathbb{R}^m$ ou $\mathbb{R}^n$ et $\dim_{\mathcal{H}}$ la dimension de Hausdorff (*voir* [2]). On sait alors que :

(i) ([1], lemme 1) $\mathcal{H}^n(f(C_f^0)) = 0$ si f est de classe $C^{m/n}$, ou de classe $C^{(m/n)-1,1}$ si $\frac{m}{n} \in \mathbb{N}$.

(ii) ([4], lemme 1) $\mathcal{H}^s(C_f^0) = 0$ implique que $\mathcal{H}^n(f(C_f^0)) = 0$ si f est de classe $C^{s/n}$, ou de classe $C^{(s/n)-1,1}$ si $\frac{s}{n} \in \mathbb{N}$.

Il semble naturel de chercher le meilleur degré de régularité $\sigma = \sigma_t$ (resp. $\sigma = \sigma_{s,t}$) de f afin que $\mathcal{H}^t(f(C_f^0)) = 0$ (resp. $\mathcal{H}^s(C_f^0) = 0$ implique $\mathcal{H}^t(f(C_f^0)) = 0$), lorsque t est, non plus entier égal à n, mais réel quelconque. Il est d'usage à la suite de Sard ([5] et [6]) de relever l'étude de C_f^0 à celle de $C_f^r = \{x \in \mathbb{R}^m | \mathrm{rang}(Df(x)) \leq r\}$, essentiellement par le théorème de Fubini dans $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$. Or si t n'est plus entier, il n'est en général pas vrai que $\mathcal{H}^r \times \mathcal{H}^{t-r} \equiv \mathcal{H}^t$; c'est la raison pour laquelle ce qui suit ne concerne que C_f^0.

Note présentée par Bernard MALGRANGE.

1. Énoncé du théorème de Sard pour C_f^0

THÉORÈME 1.1. – *Soient $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et s, t deux réels. Dès que f est de classe $\mathcal{C}^\sigma$, ou $\mathcal{C}^{\sigma-1,1}$ si $\sigma \in \mathbb{N}$, on a :*

(i) $\mathcal{H}^t(f(C_f^0)) = 0$ *pour* $\sigma = \frac{m}{t}$.

(ii) $\mathcal{H}^s(C_f^0) = 0$ *implique* $\mathcal{H}^t(f(C_f^0)) = 0$ *pour* $\sigma = \frac{s}{t}$.

Preuve. – On suit avec attention les preuves de [1] et [4] en les adaptant.

Remarquons que l'énoncé (i) complète également les résultats suivants.

- ([7], théorème 5.4) $\dim_{\mathcal{H}}(f(C_f^0)) \le \frac{m}{\sigma}$ si f est de classe $\mathcal{C}^\sigma$, ou $\mathcal{C}^{\sigma-1,1}$ si $\sigma \in \mathbb{N}$.
- ([3], théorème 3.4.3) $\mathcal{H}^{m/\sigma}(f(C_f^0)) = 0$ si f est de classe $\mathcal{C}^\sigma$ et $\sigma \in \mathbb{N}$.

2. Contre-exemple à de nouveaux raffinements

On construit une fonction qui assure que les valeurs du théorème sont les meilleures. On note $I = [0\,;\,1]$ et $I^2 = [0\,;\,1] \times [0\,;\,1]$ (carré fermé), ∂ et int la frontière et l'intérieur.

Soient $\beta \in]2\,;\,+\infty[$ et C_1, C_2, C_3, C_4, les sous-carrés (fermés) de I^2 de côté $\frac{1}{\beta}$ et de centres respectifs $\left(\frac14, \frac14\right)$, $\left(\frac34, \frac14\right)$, $\left(\frac34, \frac34\right)$, $\left(\frac14, \frac34\right)$. On poursuit à l'infini cette construction de sous-carrés ; on obtient des carrés en bijection avec l'ensemble dénombrable S :

$$S = \{(x_n)_{n\ge1} | x_n \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ jusqu'à un certain rang, } x_n = 0 \text{ au-delà}\}.$$

On note $C_{(x_n)_{n\ge1}}$ pour tout $(x_n)_{n\ge1} \in S$ le carré correspondant, de sorte que $C_i = C_{(i,0,\ldots)}$, $i \in \{1, \ldots, 4\}$ et $|C_{(x_1,\ldots,x_n,0,\ldots)}|$ $(= \sqrt{2}\beta^{-n})$ son diamètre. A chaque élément $(x_n)_{n\ge1}$ de $\Sigma = \{1, 2, 3, 4\}^{\mathbb{N}}$ est associé un unique point de $C(\beta)$ (ensemble de Cantor dans I^2) : $\bigcap_{n\ge1} C_{(x_1,\ldots,x_n,0,\ldots)}$.

A partir du segment I on construit quatre sous-segments I_1, I_2, I_3, I_4,

$$I_1 = \left[b_1 = 0\,;\,\frac19\right], \qquad I_2 = \left[b_2 = \frac29\,;\,\frac13\right], \qquad I_3 = \left[b_3 = \frac23\,;\,\frac79\right], \qquad I_4 = \left[b_4 = \frac89\,;\,1\right].$$

On itère le procédé pour obtenir des segments en bijection avec S, et chaque $(x_n)_{n\ge1} \in \Sigma$ définit un unique point de $I_{(3)}$ (ensemble de Cantor dans I) : $\bigcap_{n\ge1} I_{(x_1,\ldots,x_n,0,\ldots)}$. On a $|I_{(x_1,\ldots,x_n,0,\ldots)}| = \frac{1}{9^n}$.

2.1. *Construction de $f : I^2 \to \mathbb{R}$*

On considère f_0 une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathrm{int}(I^2)$, nulle sur ∂I^2, constante et égale à $8/9 + b_i$ sur C_i, pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, telle que sa différentielle ne s'annule pas sur $\mathrm{int}(I^2 \setminus \bigcup_{i=1}^4 C_i)$ et pour tout $k \ge 1$: $D^k f_0(x, y) \to 0$ lorsque (x, y) tend vers un point de $\partial\left(\bigcup_{i=1}^4 C_i\right) \cup \partial I^2$. La fonction f_0 permet de définir une fonction f_1 qui coïncide avec f_0 sur $I^2 \setminus \mathrm{int}\left(\bigcup_{i=1}^4 C_i\right)$, de la façon suivante : pour tout $i = \{1, 2, 3, 4\}$ on note $\tau_i : C_i \to I^2$ la translation qui centre C_i en $\left(\frac12, \frac12\right)$, et

$$\begin{aligned} \pi_\beta :\ & I^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) \to \beta \cdot (x, y) \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \pi_{1/9} :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & \alpha \to \frac{\alpha}{9} \end{aligned}$$

puis on pose : ${}_1h_i = \pi_{1/9} \circ f_0 \circ \pi_\beta \circ \tau_i : C_i \to \mathbb{R}$, que l'on prolonge à I^2 tout entier en ${}_1\tilde{h}_i = 0$ sur $I^2 \setminus C_i$, et on note finalement : $f_1 = f_0 + \sum_{i=1}^4 {}_1\tilde{h}_i$. De même on construit $f_2 : I^2 \to \mathbb{R}$, égale à f_1 sur $I^2 \setminus \mathrm{int}\left(\bigcup_{i,j\in\{1,2,3,4\}} C_{i,j}\right)$ en définissant ${}_2h_{i,j} : C_{i,j} \to \mathbb{R}$ par : ${}_2h_{i,j} \equiv \pi_{1/9} \circ \pi_{1/9} \circ f_0 \circ \pi_\beta \circ \tau_{i,j} : C_{i,j} \to \mathbb{R}$ où la translation $\tau_{i,j} : C_{i,j} \to \mathbb{R}^2$ centre $C_{i,j}$ en $\left(\frac12, \frac12\right)$.

On obtient ainsi par récurrence une fonction $f\ :\ I^2 \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$, qui est C^∞ sur $\mathrm{int}\,(I^2\backslash C(\beta))$ dont la différentielle sur $\mathrm{int}\,(I^2\backslash C(\beta))$ ne s'annule que sur les $\partial(C_{(x_n)_{n\geq 1}})$ pour $(x_n)_{n\geq 1} \in S$. Enfin, regardons l'image par f de $C(\beta)$. Si $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \Sigma(= C(\beta))$ on a, par construction de f :

$$f(x) = \sum\nolimits_{i\geq 0} \frac{1}{9^i}(8/9 + \xi_i) = 1 + \sum_{i\geq 0} \frac{\xi_i}{9^i} \qquad \text{où} \quad \xi_i = b_j \quad \text{si } x_i = j \in \{1,\, 2,\, 3,\, 4\}.$$

En notant $\tilde{x} = (x_n)_{n\geq 1} \in \Sigma\ (= I_{(3)})$on obtient : $f(x) = 1 + \tilde{x}$ et f établit donc une bijection entre $C(\beta)$ et $1 + I_{(3)}$.

2.2. *Régularité de f sur I^2 et lieu critique de f*

• f est différentiable sur I^2.

Soit $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \Sigma = C(\beta)$; on montre que $C(\beta) \subseteq C_f^0$.

Pour $h \neq 0$ dans $\mathbb{R}^2$, évaluons $\Delta_x(h) = \frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|}$. Comme $h \neq 0$, il existe $n_h \geq 1$ tel que :

$$(1) \qquad x + h \in C_{(x_1,\ldots,x_{n_h-1},0,\ldots)}, \qquad x + h \notin C_{(x_1,\ldots,x_{n_h-1},x_{n_h},0,\ldots)}.$$

On a ainsi les inégalités :

$$|h| \geq \sqrt{2}\beta^{-n_h}, \qquad |f(x+h) - f(x)| \leq \frac{1}{9^{n_h-1}},$$

et on a donc $\Delta_x(h) \leq \frac{\beta}{\sqrt{2}(9\beta^{-1})^{n_h-1}} \to 0$ quand $h \to 0$, pour $2 < \beta < 9$.

• f est deux fois différentiable sur I^2.

Soient $\Delta_x^1(h) = \frac{\|Df(x+h)\|}{|h|}$, μ une borne de $\|Df_{0(\xi)}\|$ sur I^2 et n_h tel que l'on ait (1). On a alors sur $C_{(x_1,\ldots,x_{n_h-1},0,\ldots)}\backslash \bigcup_{i=1}^4 C_{(x_1,\ldots,x_{n_h-1},i,0,\ldots)}$:

$$(2) \qquad f = \bar{f}_{n_h-2} + {}_{n_h-1}\tilde{h}_{x_1\ldots x_{n_h-1}}$$

où $\bar{f}_{n_h-2}$ est la valeur (constante) de f_{n_h-2} sur $C_{(x_i,\ldots,x_{n_h-1},0,\ldots)}$. Mais sur $C_{(x_i,\ldots,x_{n_h-1},0,\ldots)}$:

$$(3) \qquad {}_{n_h-1}\tilde{h}_{x_1\ldots x_{n_h-1}} = (\pi_{1/9})^{n_h-1} \circ f_0 \circ (\pi_\beta)^{n_h-1} \circ \tau_{x_1\ldots x_{n_h-1}}.$$

On en déduit que $\|Df(x+h)\| \leq \mu\frac{\beta^{n_h-1}}{9^{n_h-1}}$, et donc que

$$\Delta_x^1(h) \leq \mu\frac{\beta^{n_h-1}}{9^{n_h-1}}\frac{\beta^{n_h}}{\sqrt{2}} = \mu\frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\frac{\beta^2}{9}\right)^{n_h-1} \to 0, \qquad \text{quand } h \to 0, \text{ et } 2 < \beta < 3.$$

• f est C^σ, pour tout $\sigma \in \left[3;\ 2\frac{\ln 3}{\ln 2}\right[$.

Choisissons $2 < \beta < \sqrt[3]{9}$ et montrons que f est trois fois différentiable sur $\mathrm{int}(I^2)$, et $D^3f(x) = 0$ pour tout $x \in C(\beta)$.

Soit $\Delta_x^2(h) = \frac{\|D^2f(x+h)\|}{|h|}$; on a, par (2) et (3) :

$$\|D^2f(x+h)\| \leq \mu'\frac{(\beta^2)^{n_h-1}}{9^{n_h-1}} \qquad \text{où} \quad \mu' \text{ majore } \|D^2f_0(\xi)\| \text{ sur } I^2.$$

Donc $\Delta_x^2(h) \leq \mu'\left(\frac{\beta^2}{9}\right)^{n_h-1}\frac{\beta^{n_h}}{\sqrt{2}} = \mu'\frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\frac{\beta^3}{9}\right)^{n_h-1} \to 0, \qquad$ quand $h \to 0$.

On montre pour finir que f est C^σ, avec $\sigma = 2\ln 3/\ln\beta$, $2 < \beta < \sqrt[3]{9}$. Il suffit pour cela de vérifier que localement en $x \in C(\beta)$, le rapport $\Delta_{x,\sigma}^3(h) = \frac{\|D^3f(+h)\|}{|h|^{\sigma-3}}$ est borné.

Or si μ'' est un majorant de $\|D^3 f_0(\xi)\|$ sur I^2, et si $\tilde{\mu}$ est la constante $\mu'' \frac{1}{\sqrt{2}^{\sigma-3}} \beta^{\sigma-3}$, par (2) et (3), on a la majoration suivante :

$$\Delta^3_{x,\sigma}(h) \leq \mu'' \left(\frac{\beta^3}{9}\right)^{n_h - 1} \frac{\beta^{n_h(\sigma-3)}}{\sqrt{2}^{\sigma-3}} = \tilde{\mu}.$$

• On a donc construit $f : I^2 \xrightarrow{C^\sigma} I$, $\sigma = \frac{2\ln 3}{\ln \beta} \in \left[3 ; \frac{2\ln 3}{\ln 2}\right[$ telle que (*cf.* [2]) :

$$0 < \mathcal{H}^{2\ln 2/\ln\beta}(C_{(\beta)}) = \mathcal{H}^{2\ln 2/\ln\beta}(C_{(\beta)}) \qquad \text{et} \qquad 0 < \mathcal{H}^{\ln 2/\ln 3}(I_{(3)}) = \mathcal{H}^{\ln 2/\ln 3}(f(C_f^0)) < \infty.$$

Conclusion

Les hypothèses du théorème sont bien dans le meilleur rapport (notons que l'on aurait pu aussi bien construire f de classe $C^{\sigma = 2\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}}$ à l'aide de $I_{(\alpha>2)}$, au lieu de $I_{(3)}$).

Remerciements. Sans David Trotman ce travail n'existerait pas ; je le remercie de ses conseils et de l'attention qu'il a accordée à son évolution, d'un bout à l'autre.

Note remise le 10 avril 1996, acceptée le 22 avril 1996.

Références bibliographiques

[1] **Bates S. M., 1993.** Towards a precise smoothness hypothesis in Sard's theorem, *Proceedings of the AMS*, 117, p. 279-283.
[2] **Falconer K. J., 1985.** *The geometry of fractal sets*, Cambridge University Press.
[3] **Federer H., 1969.** *Geometric measure theory*, Grundlehren Math. Wiss., 153, Springer Verlag.
[4] **Norton A., 1986.** A critical set with nonnull image has large Haussdorff dimension, *Trans. AMS*, 296, p. 367-376.
[5] **Sard A., 1942.** The measure of critical values of differentiable maps, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 48, p. 883-890.
[6] **Sard A., 1958.** Images of critical sets, *Annals of Math.*, 68, p. 247-259.
[7] **Yomdin Y., 1983.** The geometry of critical and near critical values of differentiable mappings, *Math. Ann.*, 264, p. 495-515.