C. R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série I, p. 505-508, 1999
Géométrie analytique/*Analytic Geometry*

Formule de Cauchy–Crofton pour la densité des ensembles sous-analytiques

George COMTE

CMI, Université de Provence, 39, rue Joliot-Curie, 13453 Marseille cedex 13, France
Courriel : comte@gyptis.univ-mrs.fr

(Reçu le 5 octobre 1998, accepté après révision le 11 janvier 1999)

Résumé. Pour la densité des ensembles sous-analytiques, on donne une formule de représentation intégrale qui est l'analogue de la formule de Cauchy–Crofton classique pour le volume. On définit auparavant, les *profils polaires locaux généraux* d'un ensemble sous-analytique et la suite finie des *multiplicités* qui leur est attachée. Cette dernière est l'équivalent réel de la multiplicité locale des ensembles analytiques complexes. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Cauchy–Crofton formula for the density of subanalytic sets

Abstract. *For the density of subanalytic sets, we give a formula analogous to the classical Cauchy–Crofton formula for the volume. To do this we define the local polar profiles of a subanalytic set and the corresponding finite sequence of local multiplicities which is the real counterpart of the multiplicity of complex analytic sets.* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Rappelons qu'un ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est dit *sous-analytique* si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, existent un voisinage U de x et un ensemble semi-analytique borné $Z \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tels que $X \cap U = p(Z)$, où p est la projection canonique de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ sur $\mathbb{R}^n$ (*voir* [8] pour les définitions et propriétés élémentaires). Le contexte de cette Note est sous-analytique, mais exceptée la version lipschitzienne de la proposition 1.2, ce qui suit vaut encore dans toute catégorie où le lemme du chemin a lieu.

On renvoie à [1] et [2] pour certains compléments.

1. Profils polaires locaux d'un ensemble sous-analytique et leur multiplicité

Soient X un ensemble sous-analytique borné de $\mathbb{R}^n$ de dimension k et Γ son germe à l'origine.

Notons X^0, Γ^0 respectivement, les lieux réguliers de dimension k de X et Γ, $\partial X = \mathrm{adh}(X)\backslash X^0$, $\partial\Gamma = \mathrm{adh}(\Gamma)\backslash\Gamma^0$, $\mathcal{O}_\Gamma$ l'ouvert sous-analytique dense de $\mathbb{G}(k,n)$ défini par les V de $\mathbb{G}(k,n)$ tels que $V^\perp \cap C_0\Gamma = \{0\}$, où $C_0\Gamma$ est le cône tangent de Γ et $\mathbb{G}(k,n)$ la Grassmannienne des k-plans vectoriels V de $\mathbb{R}^n$.

Note présentée par Pierre LELONG.

À tout $V \in \mathbb{G}(k,n)$ on associe π_V, la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur V et on note $\mathcal{C}_{\pi_{V|X}}$ (resp. $\mathcal{C}_{\pi_{V|\Gamma}}$) son lieu critique dans X^0 (resp. dans Γ^0).

PROPOSITION 1.1 (voir [2]). – *Avec les notations qui précèdent et grâce à* [7], *on montre :*

(i) *les composantes connexes de l'ouvert* $\pi_V(X)\backslash\pi_V(\mathcal{C}_{\pi_{V|X}} \cup \partial X)$ *sont des ouverts sous-analytiques de* V *que nous notons* $\mathrm{K}_1^V, \ldots, \mathrm{K}_{\mathrm{N}_V}^V$ *et que nous appelons* profils polaires de X associés à V *;*

(ii) *la valeur constante de la fonction* $V \ni y \longmapsto \operatorname{card}\big(X \cap \pi_V^{-1}(\{y\})\big)$ *sur le profil polaire* K_j^V *est notée* E_j^V, *nous l'appelons la* multiplicité de K_j^V.

Quel que soit $V \in \mathcal{O}_\Gamma$ *:*

(iii) *le germe* $\pi_V(\Gamma)\backslash\pi_V(\mathcal{C}_{\pi_{V|\Gamma}} \cup \partial\Gamma)$ *est bien défini par un représentant suffisamment petit de* Γ. *Il s'agit du germe d'un ouvert sous-analytique de* V. *Les germes de ses composantes connexes sont notées* $\mathcal{K}_1^V, \ldots, \mathcal{K}_{n_V}^V$ *et nous les appelons les* profils polaires locaux de Γ associés à V.

(iv) *À chaque profil polaire local* $\mathcal{K}_j^V$ *associé à* $V \in \mathcal{O}_\Gamma$ *(*$j \in \{1, \ldots, n_V\}$*), on assigne un entier* e_j^V, *que nous appelons la* multiplicité du profil $\mathcal{K}_j^V$. *Cet entier est la valeur constante de la fonction* $\mathcal{K}_j^V \ni y \longmapsto \operatorname{card}\big(\Gamma \cap \pi_V^{-1}(\{y\})\big)$.

De l'existence des stratifications des morphismes sous-analytiques propres et du premier lemme d'isotopie de Thom–Mather (resp. de leur version lipschitzienne due à Parusiński [12]) on obtient :

PROPOSITION 1.2 (voir [2]). – *Il existe un ouvert sous-analytique* Ω_Γ, *dense dans* $\mathcal{O}_\Gamma$, *tel que le type topologique (resp. lipschitzien) des profils polaires locaux de* Γ *associés à* V *et la suite des multiplicités attachées à ces profils soient constants, lorsque* V *parcourt une même composante connexe de* Ω_Γ.

Précisément, en notant $\Omega_\Gamma^1, \ldots, \Omega_\Gamma^p$ *les composantes connexes de* Ω_Γ, *quel que soit* $i \in \{1, \ldots, p\}$ *et quels que soient* V *et* V' *dans* Ω_Γ^i, $n_V = n_{V'}$, $(e_1^V, \ldots, e_{n_V}^V) = (e_1^{V'}, \ldots, e_{n_{V'}}^{V'})$ *et pour tout* $j \in \{1, \ldots, n_V\}$, *il existe un germe d'homéomorphisme (resp. bilipschitzien) de triplets,* $h_j : (V, \mathcal{K}_j^V, 0) \longrightarrow (V', \mathcal{K}_j^{V'}, 0)$ *(quitte à changer les indices).*

De plus, la famille $(e_j^V)_{j \in \{1,\ldots,n_V\}, V \in \mathcal{O}_\Gamma}$ *est uniformément bornée et les types topologiques (resp. bilipschitziens) des profils polaires locaux de* Γ *sont en nombre fini.*

Remarque 1.3. – Si Γ est un germe d'ensemble analytique complexe, il résulte par exemple de [13], 3D et 3P, que pour tout $V \in \mathcal{O}_\Gamma$, $n_V = 1$, $\mathcal{K}_1^V$ est dense dans V et $e_1^V = e(\Gamma, 0)$, la multiplicité de l'ensemble analytique complexe Γ en l'origine. La suite des multiplicités des profils polaires locaux généraux : $\Big(\big(e_1^{V_1}, \ldots, e_{n_{V_1}}^{V_1}\big), \ldots, \big(e_1^{V_p}, \ldots, e_{n_{V_p}}^{V_p}\big)\Big)$, où $V_i \in \Omega_\Gamma^i$, $i \in \{1, \ldots, p\}$, étend ainsi au cadre réel la notion de multiplicité des ensembles analytiques complexes.

2. Formule de Cauchy–Crofton pour la densité des ensembles sous-analytiques

Rappelons tout d'abord la classique formule de Cauchy–Crofton pour le volume (égalité $(*)$ ci-dessous).

Soit $\gamma_{k,n}$ la mesure unitaire, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$-invariante de $\mathbb{G}(k,n)$, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ désignant le groupe orthogonal de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{H}^k$ la mesure k-dimensionnelle de Hausdorff sur $\mathbb{R}^n$, ou volume k-dimensionnel. La formule de Federer pour la mesure intégrale-géométrique de Favard (*voir* [5], 5.11, ou [6], 2.10.15) assure que pour tout sous-ensemble $(\mathcal{H}^k, k)$-rectifiable X de $\mathbb{R}^n$, et donc pour tout sous-analytique de dimension k de $\mathbb{R}^n$, le volume k-dimensionnel de X est donné par l'égalité :

$$\mathcal{H}^k(X) = \beta(k,n)^{-1} \int_{V \in \mathbb{G}(k,n)} \int_{y \in V} \operatorname{card}\big(X \cap \pi_V^{-1}(\{y\})\big)\, \mathrm{d}\mathcal{H}^k(y)\, \mathrm{d}\gamma_{k,n}(V), \qquad (*)$$

où $\beta(k,n)$ est une constante ne dépendant que de k et n.

Cette formule montre que pour obtenir le k-volume de X on peut intégrer le nombre de points d'intersection de X avec les sous-espaces affines $\pi_V^{-1}(\{y\})$ de dimension $n-k$ de $\mathbb{R}^n$. Il s'agit d'une généralisation de la méthode de Crofton ou de Favard pour le calcul de la longueur d'une courbe plane, et de la méthode de Cauchy pour le calcul de l'aire de la frontière d'un domaine convexe. Il est par conséquent d'usage de donner le nom de formule de Cauchy–Crofton à l'égalité $(*)$.

Avec les notations de la proposition 1.1 (i) et (ii), si $s(V) = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}_V} \mathrm{E}_j^V \mathcal{H}^k(\mathrm{K}_j^V)$, la formule de Cauchy–Crofton devient :

$$\mathcal{H}^k(X) = \beta(k,n)^{-1} \int_{V \in \mathbb{G}(k,n)} s(V)\,\mathrm{d}\gamma_{k,n}(V).$$

L'objet de cette Note est de localiser cette égalité, c'est-à-dire d'énoncer la formule analogue pour la k-densité du germe Γ (théorème 2.1) et d'en donner une esquisse de preuve. Rappelons que la k-densité (ou nombre de Lelong, *cf.* [10]) en l'origine du germe sous-analytique Γ est la limite du rapport : $\mathcal{H}^k(\Gamma \cap \mathrm{B}^n_{(0,r)})/\mathcal{H}^k(\mathrm{B}^k_{(0,r)})$, $\mathrm{B}^\ell_{(0,r)}$ désignant la boule de centre 0 et de rayon r de $\mathbb{R}^\ell$. Cette limite existe d'après [9], on la note $\Theta_k(\Gamma, 0)$.

THÉORÈME 2.1 (formule de Cauchy–Crofton pour la densité) (voir [1], [2]). – *Avec les notations de la proposition* 1.1 (iii) *et* (iv), *si* $\sigma(V) = \sum_{j=1}^{n_V} e_j^V \Theta_k(\mathcal{K}_j^V, 0)$, *l'égalité suivante a lieu :*

$$\Theta_k(\Gamma, 0) = \int_{V \in \mathcal{O}_\Gamma} \sigma(V)\,\mathrm{d}\gamma_{k,n}(V). \qquad (**)$$

Plan de la démonstration. – La preuve n'utilise pas la formule $(*)$ de Cauchy–Crofton pour le volume $\mathcal{H}^k$. On procède par rectifications successives.

(i) On commence par prouver $(**)$ pour les cônes sous-analytiques de dimension k inclus dans les k-plans de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire pour des cônes plans. Cette étape résulte essentiellement du théorème de changement de variables, du caractère $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$-invariant de $\gamma_{k,n}$ et de l'action transitive sur le sous-espace vectoriel sous-jacent à $V \in \mathbb{G}(k,n)$ du fixateur de V dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

(ii) On montre ensuite $(**)$ pour les cônes sous-analytiques de $\mathbb{R}^n$ de dimension k, lisses hors de leur sommet. On rectifie pour cela ces cônes sur des cônes plans qui leur sont tangents et on conclut par (i).

(iii) Finalement, on prouve $(**)$ en toute généralité, en décomposant Γ en un nombre fini de graphes de fonctions analytiques à dérivées bornées au-dessus d'ouverts de $\mathbb{R}^k$ et en exprimant la densité de chacun de ces morceaux en fonction de celle de leur cône tangent. On est alors ramené à l'étape (ii).

COROLLAIRE 2.2 (voir [2], [11]). – *La densité d'un ensemble sous-analytique est localement bornée.*

Démonstration. – Avec les notations de la proposition 1.1, la version non locale de la proposition 1.2, c'est-à-dire le théorème de Gabrielov, de finitude uniforme du nombre de composantes des fibres des projections de X (*voir* [7]), montre que la famille $\left(\mathrm{E}_j^V\right)_{j \in \{1,\ldots,\mathrm{N}_V\}, V \in \mathbb{G}(k,n)}$ est majorée, disons par $M < \infty$.

On en déduit que pour tout $x \in X$, la famille $\left(e_j^{x,V}\right)_{j \in \{1,\ldots,n_{x,V}\}, V \in \mathcal{O}_{E_x}}$ est aussi majorée par M, où $\left(e_j^{x,V}\right)_{j \in \{1,\ldots,n_{x,V}\}}$ désignent les multiplicités des profils polaires locaux $\mathcal{K}_j^{E_x,V}$ du germe X_x de X en x, associés à V. La formule $(**)$ de Cauchy–Crofton pour la densité donne alors : $\Theta_k(E, x) \leq M$.

COROLLAIRE 2.3 (voir [4], [3]). – *Soit* $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^n$ *un germe d'ensemble analytique complexe à l'origine de dimension* k. *On a l'égalité :* $e(\mathcal{A}, 0) = \Theta_{2k}(\mathcal{A}, 0)$.

Démonstration. – Notons $\widetilde{\mathbb{G}}(k,n)$ la Grassmannienne des k-plans vectoriels complexes $\widetilde{V}$ de $\mathbb{C}^n$ et $\widetilde{\gamma}_{k,n}$ sa mesure unitaire d'espace $\mathrm{U}(n)$-homogène ($\mathrm{U}(n)$ le groupe unitaire de $\mathbb{C}^n$). La version complexe du théorème 2.1 (*cf.* [1] et [2] pour une version générale de $(**)$) et la remarque 1.3 permettent d'écrire, en considérant $\mathcal{A}$ comme un sous-analytique de dimension $2k$ dans $\mathbb{R}^{2n}$:

$$\Theta_{2k}(\mathcal{A},0) = \int_{\widetilde{V}\in\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \sum_{j=1}^{n_V} e_j^{\widetilde{V}}\,\Theta_k(\mathcal{K}_j^{\widetilde{V}},0)\,\mathrm{d}\widetilde{\gamma}_{k,n}(\widetilde{V}) = \int_{\widetilde{V}\in\widetilde{\mathbb{G}}(k,n)} e(\mathcal{A},0)\,\mathrm{d}\widetilde{\gamma}_{k,n}(\widetilde{V}) = e(\mathcal{A},0).$$

Remarque 2.4. – On montrera ailleurs comment la formule de Cauchy–Crofton pour la densité permet d'obtenir pour Γ une condition d'équisingularité le long d'un sous-espace lisse $Y \subset \mathbb{R}^n$ qui implique la continuité de la densité de Γ le long de Y (*cf.* [1]).

Remerciements. Le théorème 2.1 et sa preuve ont bénéficié des suggestions de K. Kurdyka, J.-M. Lion et B. Teissier. Il m'est très agréable de les en remercier ici.

Références bibliographiques

[1] Comte G., Densité et images polaires en géométrie sous-analytique, Thèse, Université de Provence, 1998.
[2] Comte G., Profils polaires locaux et formule de Cauchy–Crofton pour la densité des ensembles sous-analytiques, Prépublication 98-12 de l'Université de Provence, 1998.
[3] Demailly J.-P., Nombres de Lelong généralisés, théorèmes d'intégralité et d'analyticité, Acta Math. 159 (3-4) (1987) 153–169.
[4] Draper R.N., Intersection theory in analytic geometry, Math. Ann. 180 (1969) 175–204.
[5] Federer H., The (Φ,k) rectifiable subsets of n-space, Trans. Amer. Math. Soc. 62 (1947) 114–192.
[6] Federer H., Geometric measure theory, Grundlehren Math. Wiss. 153, Springer-Verlag, 1969.
[7] Gabrielov A.M., Projections of semianalytic sets, Funk. Anal. i Priložen 2 (4) (1968) 418–430.
[8] Hironaka H., Subanalytic sets, in: Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Kinokuniya, Tokyo, 1973, pp. 453–493.
[9] Kurdyka K., Raby G., Densité des ensembles sous-analytiques, Ann. Inst. Fourier Grenoble 39 (1989) 753–771.
[10] Lelong P., Intégration sur un ensemble analytique complexe, Bull. Soc. Math. France 85 (1957) 239–262.
[11] Rolin J.-P., Intégration des fonctions sous-analytiques et volumes des ensembles sous-analytiques, Ann. Inst. Fourier Grenoble 48 (1998) 755–767.
[12] Parusiński A., Lipschitz stratifications of subanalytic sets, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 27 4e série (1994) 661–696.
[13] Whitney H., Complex analytic varieties, Addison-Wesley, 1972.