NATURE LOG-ANALYTIQUE DU VOLUME DES SOUS-ANALYTIQUES

G. Comte, J.-M. Lion et J.-P. Rolin

Soit X un sous-ensemble de $\mathbf{R}^m$ qui admet une partition localement finie en sous-variétés analytiques. La dimension de X est le maximum des dimensions des sous-variétés de la partition. Munissons chacune de ces sous-variétés de la structure riemannienne induite par la structure euclidienne de $\mathbf{R}^m$. Soit k un entier. Si la dimension de X est strictement supérieure à k, le volume k-dimensionnel $vol(X)$ de X est infini. Sinon il est égal à la somme des volumes k-dimensionnels des sous-variétés de dimension k de la partition (ou encore à sa mesure k-dimensionnelle de Hausdorff cf. [Fe]). Il peut alors être nul (ssi $\dim X < k$), fini ou infini. La dimension de X et son volume k-dimensionnel ne dépendent pas du choix de la partition. Soit $x \in \mathbf{R}^m$. On appelle k-densité de X au point x la limite $\Theta(x)$, si elle existe,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} vol(X \cap \{x'/||x - x'|| < \varepsilon\})/c_k \varepsilon^k$$

où c_k est le volume de la boule unité de $\mathbf{R}^k$. Lelong ayant le premier prouvé l'existence de $\Theta(x)$ lorsque X est analytique complexe, on appelle aussi $\Theta(x)$ le nombre de Lelong de X en x (dans le cas complexe $\Theta(x)$ est un entier, égal à la multiplicité de X en x). Il est prouvé dans [KR] que les ensembles sous-analytiques de $\mathbf{R}^m$ admettent une densité en tous les points de $\mathbf{R}^m$.

Dans ce travail nous précisons le théorème 1 de [LR2] qui porte sur la variation du volume k-dimensionnel de X lorsque X appartient à une famille "sous-analytique globale" de sous-analytiques globaux. Nous améliorons aussi son corollaire relatif à la nature de la fonction densité $\Theta(x)$ lorsque X est un sous-analytique global.

Avant d'énoncer nos résultats rappelons la définition des sous-analytiques globaux. Ce sont les sous-ensembles de $\mathbf{R}^m$ qui sont des sous-analytiques du produit $\mathbf{P}_1^m$ où $\mathbf{P}_1$ désigne la droite projective réelle. Plus précisément, la droite réelle $\mathbf{R}$ est plongée dans la droite projective réelle $\mathbf{P}_1$: $[x : 1] \sim [1 : x']$ ssi $xx' = 1$. L'espace $\mathbf{R}^m$ est donc plongé dans le tore $\mathbf{P}_1^m$. Un sous-ensemble

Y de $\mathbf{R}^m$ est un *sous-analytique global* s'il existe $d \in \mathbf{N}$, et un sous-ensemble semi-analytique Z du tore $\mathbf{P}_1^{m+d}$ tel que $Y = \pi(Z) \cap \mathbf{R}^m$ où π est la projection canonique de $\mathbf{P}_1^{m+d}$ sur $\mathbf{P}_1^m$. Soit D un sous-ensemble de $\mathbf{R}^m$. Une fonction $f : D \to \mathbf{R}$ est une *fonction sous-analytique globale* si son graphe est un sous-analytique global. Le lecteur peut consulter [BM], [DD], [DS], [Ga], [Hi], [Ku], [Ło] pour connaître les premières propriétés des sous-analytiques.

Nous allons montrer le théorème suivant.

Théorème 1′. *Soit Y un sous-analytique global de $\mathbf{R}^{n+m}$. On suppose que les fibres $Y_x = Y \cap (\{x\} \times \mathbf{R}^m)$ sont de dimension au plus k. Le lieu des points où le volume k-dimensionnel $v(x)$ de Y_x est fini est un sous-analytique global B de $\mathbf{R}^n$. La restriction de v à B est de la forme $v = P(A_1, ..., A_r, \log A_1, ..., \log A_r)$ où les A_i sont sous-analytiques globales et la fonction P est un polynôme.*

Si Y est un sous-analytique non global (ou un semi-analytique), l'ensemble B n'est pas nécessairement un sous-analytique de $\mathbf{R}^n$. Par exemple, la réunion des sous-ensembles $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2/|y| < |x|\}$ et $\{1/n\ ;\ n \in \mathbf{N}, n \neq 0\} \times \mathbf{R}$ est un semi-analytique Y de $\mathbf{R}^2$ et l'ensemble B associé qui est égal à $\mathbf{R} \setminus \{1/n\ ;\ n \in \mathbf{N}, n \neq 0\}$ n'est pas sous-analytique.

Le corollaire qui suit se déduit du théorème 1' comme le corollaire au théorème 1 de [LR2] se déduit de ce dernier.

Corollaire. *Soit X un sous-analytique global de dimension au plus k de $\mathbf{R}^m$. Alors la fonction densité k-dimensionnelle $\Theta(x)$ de X est bien définie en tout point de $\mathbf{R}^m$ et est une fonction bornée de la forme*

$$\Theta = P(A_1, ..., A_r, \log A_1, ..., \log A_r)$$

où les A_i sont sous-analytiques globales et la fonction P est un polynôme.

Les premières étapes de [LR2] (i.e. théorème d'intégration de [LR2] et début de la preuve du théorème 1) peuvent être résumées par le lemme suivant.

Lemme [LR2]. *Il existe une fonction positive G définie sur $\mathbf{R}^n \times]0, 1[^k$ de la forme $G = P(A_1, ..., A_r, \log A_1, ..., \log A_r)$ où les A_i sont sous-analytiques globales et la fonction P est un polynôme et telle que*

$$v(x) = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} (...(\lim_{\varepsilon_k \to 0} G(x, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_k))...).$$

Ainsi pour obtenir le théorème 1' il suffit de montrer les propositions suivantes.

Proposition 1. *Soit Y un sous-analytique global de $\mathbf{R}^{n+m}$. On suppose que les fibres $Y_x = Y \cap (\{x\} \times \mathbf{R}^m)$ sont de dimension au plus k. Le lieu des points x de $\mathbf{R}^n$ où le volume k-dimensionnel $v(x)$ est fini est un sous-analytique global de $\mathbf{R}^n$.*

Proposition 2. *Soit G une fonction positive définie sur $\mathbf{R}^{n+1}$, à valeurs dans $[0, +\infty[$ et de la forme $P(A_1, ..., A_r, \log A_1, ..., \log A_r)$ où les A_i sont sous-analytiques globales et la fonction P est un polynôme. On suppose que si $x \in \mathbf{R}^n$, la limite $g(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} G(x, \varepsilon)$ est finie. Alors la fonction g est de la forme $p(a_1, ..., a_s, \log a_1, ..., \log a_s)$ où les a_i sont sous-analytiques globales et la fonction p est un polynôme.*

Nous déduirons la proposition 1 de deux affirmations. La première résume les résultats de Parusiński sur l'existence de stratifications sous-analytiques localement lipschitz-triviales (premier lemme d'isotopie de Thom-Mather dans la catégorie lipschitz) (voir [Pa3] pour une vue générale).

Affirmation 1 (Théorème 1.6 et Lemme 1.7 de [Pa4])**.** *Soit Z un sous-analytique de $[-1, 1]^n \times B_m$ où B_m désigne la boule unité de $\mathbf{R}^m$. Il existe une partition finie de $[-1, 1]^n$ en sous-analytiques $D_1, ..., D_t$ tels que si x, x' appartiennent au même D_i il existe un homéomorphisme bi-lipschitzien F de B_m qui fixe l'origine et qui envoie Z_x sur $Z_{x'}$.*

Affirmation 2. *Soient F un homéomorphisme bi-lipschitzien de la boule unité qui fixe l'origine, K une constante de Lipschitz commune à F et son inverse et J l'inversion par rapport à la sphère unité de $\mathbf{R}^m$. Si U est un sous-ensemble de $\mathbf{R}^m \setminus B_m$ de volume fini, les volumes de U et de $J \circ F \circ J(U)$ sont dans un rapport compris entre $1/K^{3m}$ et K^{3m}.*

Preuve de l'affirmation 2. Il suffit de montrer :
$(*)$ *si $y \in \mathbf{R}^m \setminus B_m$ et si $\eta > 0$, il existe $R(y, \eta) > 0$ tel que l'image de la boule $B(y, R)$ par l'application $J \circ F \circ J$ est contenue dans la boule de centre $J \circ F \circ J(y)$ et de rayon $K^3(1 + \eta)^2 R$ pour tout $R < R(y, \eta)$.*
Ceci résulte des points 1) et 2) suivants :
1) Puisque F et son inverse sont K-lipschitziens et fixent l'origine, on a pour tout $y \in B_m$ non nul et $R > 0$: $1/K||y|| < ||F(y)|| < K||y||$ et $F(B(y, R)) \subset B(F(y), KR))$.

2) Si $y \in \mathbf{R}^m$ non nul et $u \in \mathbf{R}^m$, alors :

$$||dJ(y).u|| = ||\frac{u}{||y||^2} - 2(y \cdot u)\frac{y}{||y||^4}|| \leq \frac{||u||}{||y||^2}.$$

Ceci implique que si $\eta > 0$ il existe $r(y, \eta) > 0$ tel que l'image de la boule $B(y, r)$ par l'application J est contenue dans la boule de centre $J(y)$ et de rayon $(1 + \eta)r/||y||^2$ pour tout $r < r(y, \eta)$.
On obtient $(*)$ en choisissant $R(y, \eta)$ inférieur à $r(y, \eta)$ et à $\dfrac{r(F \circ J(y), \eta)||y||^2}{K(1 + \eta)}$.

Preuve de la proposition 1. On peut supposer que Y est contenu dans $[-1, 1]^n \times \mathbf{R}^m$ et que les fibres Y_x ne rencontrent pas la boule unité B_m. Notons Z le sous-analytique relativement compact $Z = \{(x, z)/x \in [-1, 1]^n, \exists y \in Y_x, z = J(y)\}$. En appliquant les résultats de Parusiński à Z on peut conclure. En effet, soit D_i un élément de la partition finie de $[-1, 1]^n$ obtenue. Si x, x' appartiennent à D_i il existe un homéomorphisme bi-lipschitzien F de la boule unité qui fixe l'origine et qui envoie Z_x sur $Z_{x'}$. Ceci implique, d'après l'affirmation 2, que l'ensemble des points x tels que le volume $v(x)$ est fini est la réunion de certains D_i.

Preuve de la proposition 2. Nous montrons cette proposition en appliquant le théorème de préparation des fonctions sous-analytiques de [LR1] simultanément aux fonctions $A_1, ..., A_r$ qui interviennent dans la définition de $G(x, \varepsilon)$. Quitte à se restreindre à un sous-analytique global D de $\mathbf{R}^n \times]0, 1[$ tel que tout point x de $\mathbf{R}^n$ est dans l'adhérence de $(x \times \mathbf{R}) \cap D$, le théorème de préparation des fonctions sous-analytiques permet de supposer être dans la situation suivante (voir la preuve du théorème d'intégration de [LR2]). La restriction de $G(x, \varepsilon)$ à D est une somme finie de termes de la forme

$$g_{p,\kappa}(x)\varepsilon^{p/q}u_{p,\kappa}(\theta(x), b(x)\varepsilon^{1/q})(\log \varepsilon)^\kappa$$

où $\kappa \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$, $g_{p,\kappa}(x)$ est un polynôme en des fonctions sous-analytiques globales et en leurs logarithmes, $b(x)$ est une fonction sous-analytique globale, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_N)$ avec les $\theta_i(x)$ sous-analytiques globales et $u_{p,\kappa}$ est une fonction analytique définie sur $\overline{(\theta, by^{1/q})(D)}$ telle que $u_{p,\kappa}(\theta(x), 0) \neq 0$ si $x \in D$. Contrairement à la preuve du théorème d'intégration de [LR2], il n'apparaît pas ici de monôme de la forme $c(x)/y^{1/q}$ dans l'unité $u_{p,\kappa}$, car on a supposé que si $x \in \mathbf{R}^n$, x est dans l'adhérence de $(x \times \mathbf{R}) \cap D$.

La fonction $G(x,\varepsilon)$ s'écrit donc sous la forme

$$G(x,\varepsilon) = \sum_{-l\leq p\leq l} \sum_{0\leq\kappa\leq d} g_{p,\kappa}(x)\varepsilon^{p/q} u_{p,\kappa}(\theta(x), b(x)\varepsilon^{1/q})(\log\varepsilon)^{\kappa}.$$

La proposition résulte alors de la remarque suivante. Soit $x \in \mathbf{R}^n$. La limite $g(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} G(x,\varepsilon)$ est finie si et seulement si $g_{0,\kappa}(x) = 0$ lorsque $\kappa > 0$ et $g_{p,\kappa}(x) = 0$ lorsque $p < 0$. Et alors $g(x) = g_{0,0}(x)u_{0,0}(\theta(x), 0)$.

Pour conclure. L'affirmation 1 admet une version semi-algébrique : si Z est semi-algébrique alors la partition $D_1, ..., D_t$ obtenue est semi-algébrique. En effet les diverses étapes de la preuve de cette affirmation sont valides dans le cadre semi-algébrique. C'est en particulier le cas de la démonstration de l'existence de stratifications lipschitziennes adaptées aux ensembles semi-analytiques compacts [Pa2] (voir aussi [Pa1]). On peut également citer le théorème 4 de [CR] qui donne une stratification semi-algébrique localement triviale de manière lipschitz (mais non bilipschitz) d'un semi-algébrique.

La proposition 1 admet donc comme corollaire le théorème suivant:

Théorème 3. *Soit Y un semi-algébrique de $\mathbf{R}^{n+m}$. On suppose que les fibres $Y_x = Y \cap (\{x\} \times \mathbf{R}^m)$ sont de dimension au plus k. Le lieu des points x de $\mathbf{R}^n$ où le volume k-dimensionnel $v(x)$ est fini est un semi-algébrique de $\mathbf{R}^n$.*

En revanche, l'exemple suivant montre qu'on ne peut pas améliorer la seconde affirmation du théorème 1' lorsque Y est supposé semi-algébrique. Considérons l'ensemble semi-algébrique :

$$Y = \{(x,y,z),\ x \in [0,1],\ y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}.$$

Pour tout x le volume 1-dimensionnel de la fibre Y_x est

arccos(x), qui n'est pas de la forme $P(A_1, ..., A_r, \log A_1, ..., \log A_r)$ avec les A_i semi-algébriques et la fonction P polynôme.

Bibliographie

[BM] E. Bierstone et P. Milman, Semianalytic and subanalytic sets, Publ. Math. IHES, 67, 5-42 (1988)

[CR] M. Coste et M. Reguiat, Trivialités en famille, Real algebraic geometry (Rennes 1991), Lecture Notes in Math., 1524, Springer, Berlin, 193-204 (1992)

[DD] J. Denef, L. van den Dries, p-adic and real subanalytic sets, Ann. of Maths, 128, 79-138 (1988)
[DS] Z. Denkowska et J. Stasica, Ensemble sous-analytiques à la polonaise, preprint (1985)
[Fe] H. Federer, Geometric measure theory, Grundlehren Math. Wiss. 153, Springer Verlag (1969)
[Ga] A.M. Gabrielov, Projections of semi-analytic sets, Funct. Anal. Appl., 2, 282-291 (1968)
[Hi] H. Hironaka, Subanalytic sets, Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Tokyo, Kinokuniya, 453-493 (1973)
[Ku] K. Kurdyka, Points réguliers d'un sous-analytique, Ann. Fourier 38, 133-156 (1988)
[KR] K. Kurdyka et G. Raby, Densité des ensembles sous-analytiques, Ann. Fourier, 39, 753-771 (1989)
[Le] P. Lelong, Intégration sur un ensemble analytique complexe, Bull. Soc. math. France, 85, 239-262 (1957)
[Lo] S. Łojasiewicz, On semi-analytic and subanalytic geometry, Banach Center Publication 34, 89-104 (1995)
[LR1] J.-M. Lion et J.-P. Rolin, Théorème de préparation pour les fonctions logarithmico-exponentielles, Ann. Inst. Fourier, 47, 3, 859-884 (1997)
[LR2] J.-M. Lion et J.-P. Rolin, Intégration des fonctions sous-analytiques et volumes des sous-analytiques, Ann. Inst. Fourier, 48, 3, 755-767 (1998)
[Pa1] A. Parusiński, Lipschitzowska stratyfikacja zbiorów semi-analitycznych, Thèse, Université Jagellone, Cracovie (1987)
[Pa2] A. Parusiński, Lipschitz properties of semi-analytic sets, Ann. Inst. Fourier, 38, 4, 189-213 (1988)
[Pa3] A. Parusiński, Lipschitz stratification, dans Global analysis in modern mathematics, Proceedings of a Symposium in honor of R. Palais, 73-89, Publish or Perish (1993)
[Pa4] A. Parusiński, Lipschitz stratification of subanalytic sets, Ann. ENS, 27, 661-996 (1994)

Georges Comte, Université de Nice Sophia-Antipolis - France
email: comte@math.unice.fr

Jean-Marie Lion, CNRS et Université de Bourgogne, Dijon - France
email: lion@u-bourgogne.fr

Jean-Philippe Rolin, Université de Bourgogne, Dijon - France
email: rolin@u-bourgogne.fr