Invariants locaux et conditions de régularité

Lille, 22 mars 201

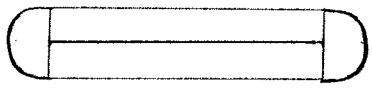
1. Invariants de Lipschitz-Killing

Soit X une variété lisse de $\mathbb{R}^n$, compacte, éventuellement à bord. On note $\mathcal{T}_r(X)$ son voisinage tubulaire de rayon $r\geq 0$. Par définition $\mathcal{T}_r(X) = \bigcup_{x\in X} B(x,r)$.

Le calcul de $Vol(\mathcal{T}_r(X))$, pour r suffisamment petit fait apparaître des invariants de courbure de X. Notons α_i le i-Volume de la boule unité de $\mathbb{R}^i$.

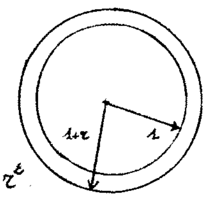
<u>Quelques exemples</u> :

• $n=2$, $X = [0,1]\times\{0\}$



$$Vol_2(\mathcal{T}_r(X)) = 2r + \pi r^2 = Vol_2(X) + \alpha_1 Vol_1(X)\, r + \alpha_2\, \chi(X).r^2$$

• $n=2$, $X = B(0,1)$



$$Vol_2(\mathcal{T}_r(X)) = \pi(1+r)^2 = Vol_2(X) + \alpha_1.\pi.r + \alpha_2.\chi(X)r^2$$

• $n=2$, $X = S(0,1)$

$$Vol_2(\mathcal{T}_r(X)) = \pi[(1+r)^2-(1-r)^2] = 4\pi r = Vol_2(X) + \alpha_1 Vol_1(X).r + \alpha_2.\chi(X).r^2.$$

De façon générale on dispose du théorème suivant :

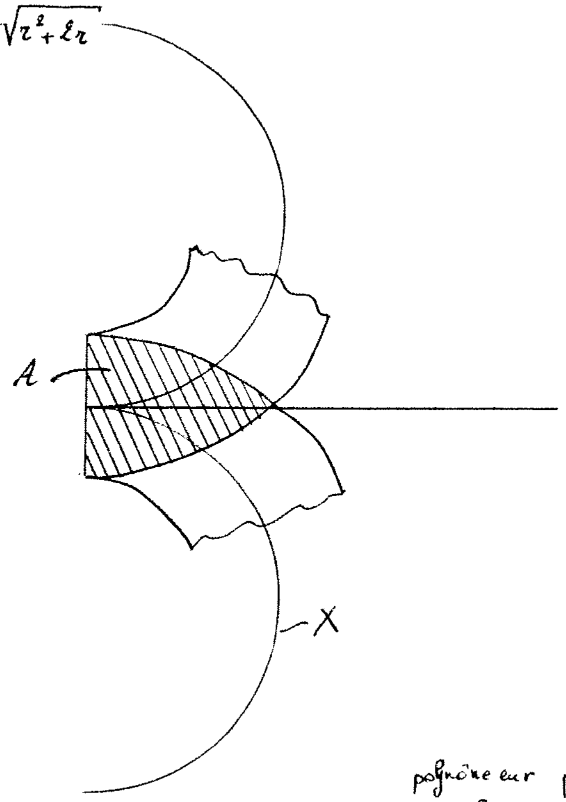
<u>Théorème (Weyl, 1939)</u> : Soit X une sous-variété lisse à bord de $\mathbb{R}^n$, il existe des invariants (de courbure) de X, $\Lambda_0(X), \dots, \Lambda_n(X)$ tels que : $Vol(\mathcal{T}_r(X)) = \sum_{i=0}^{n} \Lambda_i(X).\alpha_{n-i}.r^{n-i}$. En particulier, $Vol(\mathcal{T}_r(X))$ est un polynôme en r (pour r suffisamment petit).

<u>Cas des variétés singulières</u> : lorsque X est une variété singulière, il n'est plus vrai que $Vol(\mathcal{T}_r(X))$ est un polynôme en r.

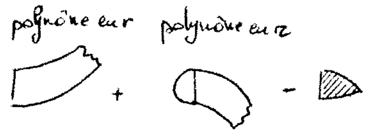
Par exemple si $X = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \geq 0 \ , \ (x^2+y-1)(x^2+(y-2)^2-1) = 0 \}$

$Vol(T_r(X)) = \frac{3}{2}\pi r^2 + 4\pi r - A$

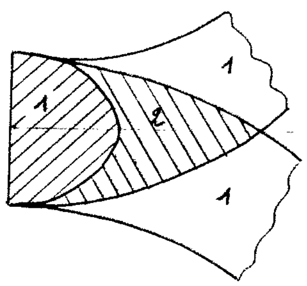
où $A = (1+r)^2 \cdot \text{Arcos}\left(\frac{1}{1+r}\right) - \sqrt{r^2+2r}$

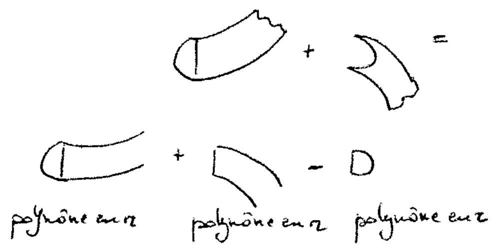


Quand on calcule $Vol(T_r(X))$, on calcule :



En revanche si on donne le poids suivant à chaque aire, on calcule :





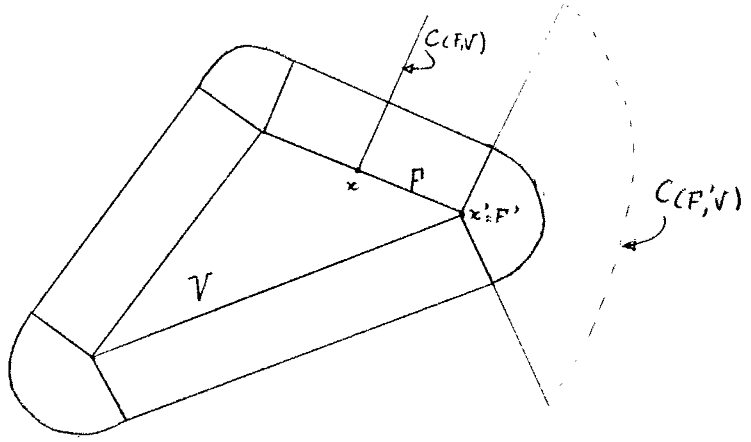
Ceci revient à intégrer la fonction constructible $x \longmapsto \chi(B(x,r) \cap X)$. Cette remarque conduit au théorème suivant :

Théorème (J. Fu, Bröcker-Kuppe etc...) : Soit X un sous ensemble définissable de $\mathbb{R}^n$. Quel que soit $r \geq 0$, $\displaystyle\int_{x \in \mathbb{R}^n} \chi(B(x,r) \cap X)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \Lambda_{n-i}(X) \cdot \alpha_i \cdot r^i$.

Si r est suffisamment petit, on retrouve le théorème précédent dans le cas lisse

les $\Lambda_0(X), \dots, \Lambda_n(X)$ sont appelés les courbures de Lipschitz-Killing de X

Exemples: le cas des polytopes convexes.



Un polytope (compact) convexe est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points. Il s'agit aussi d'une intersection finie de demi-espaces fermés, ce qui donne lieu à la notion de face k-dimensionnelle, obtenues comme intersection minimale de $n-k$ hyperplans bordant des demi-espaces définissant le polytope.

On note $\mathcal{F}_k$ l'ensemble des faces k-dimensionnelles du polytope V.

Si $F\in\mathcal{F}_k$ et $x\in F'$, on note $C(F,V)$ le cône conormal de V en x (il ne dépend pas de x, mais seulement de F'). Par définition il s'agit du cône positif engendré par les vecteurs normaux aux faces hyperplanes définissant F' et sortant de V. Précisément si $F'=\bigcap_{i=1}^{n-k} H_i$ où $H_1,\dots,H_{n-k}$ sont des faces hyperplanes de V, si $\vec{v}_i$ est un vecteur unitaire normal à H_i et sortant de V,

$$C(F,V)=\sum_{i=1}^{n-k}\mathbb{R}_+.\vec{v}_i .$$

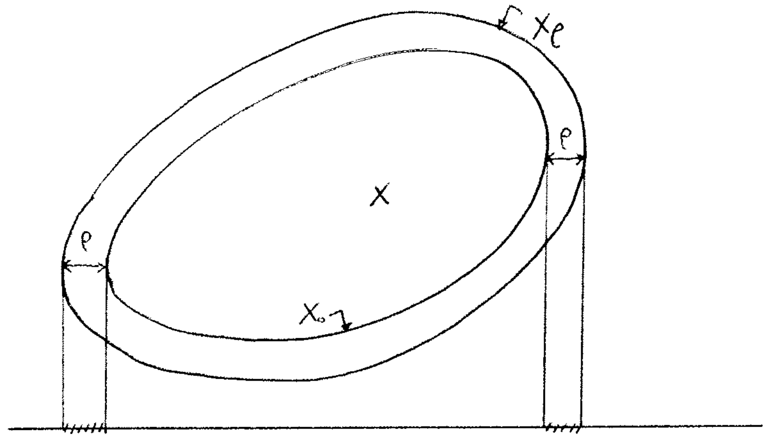
Enfin on note $\gamma(F,V)=Vol_{n-k}\left(C(F,V)\cap B(0,1)\right)/\alpha_{n-k}$. On appelle cette quantité l'angle extérieur à V le long de F'. Finalement:

$$\int_{x\in\mathbb{R}^n}\chi(B(x,r)\cap X) = Vol(T_r(V)) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{F\in\mathcal{F}_k}\alpha_k.\gamma(F,V).Vol_k(F).r^k \quad \text{ie:}$$

$$\Lambda_k(V)=\sum_{F\in\mathcal{F}_k}\gamma(F,V).Vol_k(F). \qquad (1)$$

Exemple 2 : le cas convexe lisse

(Steiner formula 1810)



Soit X un convexe à bord lisse de $\mathbb{R}^n$. Notons $X_r = \partial T_r(X)$.

On a $\mathrm{Vol}_n(T_r(X)) = \mathrm{Vol}_n(X) + \displaystyle\int_{\rho=0}^{r} \mathrm{Vol}_{n-1}(X_\rho)\, d\rho$.

Soit pour $P \in G_{(n,n-1)}$, dP la mesure canonique unitaire, image par

$O_n(\mathbb{R}) \longrightarrow G_{(n,n-1)}$ où P_0 est un hyperplan vectoriel quelconque de $\mathbb{R}^n$,

$g \longmapsto g.P_0$

de la mesure de Haar invariante sur $O_n(\mathbb{R})$.

D'après la formule de Crofton : $\mathrm{Vol}_{n-1}(X_\rho) = \dfrac{1}{\beta_{(n,n-1)}} \displaystyle\int_{P \in G_{(n,n-1)}} \int_{l \in G_{(n,1)}} \#(l \cap X_\rho)\, dP$

où l est orthogonale à P.

Dans ce cas : $\mathrm{Vol}_{n-1}(X_\rho) = \dfrac{1}{\beta(n,n-1)} \cdot 2 \displaystyle\int \mathrm{Vol}_{n-1}(\pi_P(X_\rho)) = \dfrac{2}{\beta(n,n-1)} \int_{P \in G(n,n-1)} \mathrm{Vol}_{n-1}(T_\rho(\pi_P(X)))\, d$

Si l'on procède par récurrence : $\mathrm{Vol}_{n-1}(T_\rho(\pi_P(X))) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{n-i}\, \rho^{n-i}\, \Lambda_i(\pi_P(X))$

et $\mathrm{Vol}_n(T_r(X)) = \mathrm{Vol}_n(X) + \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha_{n-i}}{n-i+1}\, r^{n-i+1} \int_P \Lambda_i(\pi_P(X))\, dP$. (2)

<u>Remarque</u> : les formules (1) et (2) des cas polytope et convexe suggèrent

que $\Lambda_i(X) = \displaystyle\int_{P \in G(n,i)} \int_{l,\, l \perp P} \chi(l \cap X)\, dl\, dP$. Cette formule

reste vraie dans le cas général :

si X est un sous-ensemble définissable de $\mathbb{R}^n$, $\Lambda_i(X) = \int_{\bar{P}\in G(n,n-i)} \chi(\bar{P}\cap X)\,d\bar{P}$.

<u>En résumé</u>: Si X est un ensemble définissable de $\mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{Vol}_n(T_r(X)) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{n-i}\, r^{n-i}\, \Lambda_i(X) \quad \text{où} \quad \Lambda_i(X) = \frac{1}{\beta(n,i)} \int_{\bar{P}\in G(n,n-i)} \chi(\bar{P}\cap X)\,d\bar{P}$$

2. Localisation des $\Lambda_i(X)$

Supposons que X est un ensemble définissable de $\mathbb{R}^n$, de dimension d. Alors $\Lambda_i(X) = 0$ pour $i > d$, puisque $\bar{P}\cap X = \emptyset$ pour $\bar{P}$ générique dans $\bar{G}(n,n-i)$.
De plus si $\Lambda_d(X) = \frac{1}{\beta(n,d)} \int_{\bar{P}\in G_{n,n-d}} \chi(\bar{P}\cap X)\,d\bar{P} = \frac{1}{\beta(n,d)} \int_{\bar{P}\in G(n,n-d)} \#(\bar{P}\cap X)\,d\bar{P} = \mathrm{Vol}_d(X)$.

Il s'agit en effet de la formule de Crofton. Or le volume possède la localisation suivante en un point de X: $\Theta_d(X,x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathrm{Vol}_d(X\cap B(x,\varepsilon))}{\alpha_d\cdot \varepsilon^d}$. Cette limite existe ([Kurdyka-Raby 1988]) et est appelée la densité de X en x.

On va montrer que chaque $\Lambda_i(X)$ admet une localisation en $x\in X$.

<u>Théorème</u>: Soit X un sous-ensemble définissable de $\mathbb{R}^n$, compact, de dimension d. Quel que soit $i\in\{0,\dots,n\}$ la limite

$$\Lambda_i^{loc}(X,x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\Lambda_i(X\cap B(x,\varepsilon))}{\alpha_i\ \varepsilon^i} \text{ existe.}$$

On l'appelle la $i$ème courbure de Lipschitz-Killing locale.

<u>Remarque</u>: $\Lambda_0^{loc}(X) = \frac{1}{\alpha_0}\chi(X\cap B(x,\varepsilon)) = 1$

$\Lambda_d^{loc}(X) = \mathrm{Vol}_d^{loc}(X)$ par la formule de Crofton.
$= \Theta_d(X,x)$

$\Lambda_i^{loc}(X,x) = 0$ pour $i>d$.

<u>Preuve du Théorème</u>: $x=0$. On commence par remarquer que $\Lambda_i(\frac{1}{\varepsilon}.[X\cap B(0,\varepsilon)]) = \Lambda_i(\frac{1}{\varepsilon}X\cap B(0,1)) = \frac{\Lambda_i(X\cap B(0,\varepsilon))}{\varepsilon^i}$

On doit donc prouver que $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\bar{P}\in G(n,n-i)} \chi(\frac{1}{\varepsilon}X\cap B(0,1)\cap\bar{P})\,d\bar{P}$ existe.

Soit $G = \{ \bar{P} \in \bar{G}(n,n-i) \,/\, \bar{P} \cap B(0,1) \neq \emptyset \}$. G est compact.

Soit alors $E = \{ (\bar{P}, \varepsilon, x) \in G \times]0,1] \times B^{n-i}(0,1) \,/\, x \in \bar{P} \cap \frac{1}{\varepsilon} X \cap B(0,1) \}$ et $p : \bar{E} \longrightarrow G \times [0,1]$. L'application p est stratifiable : il existe une stratification de Whitney de $G \times [0,1]$, une stratification de Whitney de $\bar{E}$ telle que pour toute strate $\sigma \subseteq G \times [0,1]$, $p^{-1}(\sigma)$ est réunion de strates $S_1, \dots, S_l$ et $p|_{S_j}$ est une submersion. En particulier $\forall (\bar{P}, \varepsilon) \in \sigma$, $p^{-1}(\bar{P}, \varepsilon)$ a le même type topologique que $p^{-1}(\bar{P}', \varepsilon')$, $\forall (\bar{P}', \varepsilon') \in \sigma$. Comme $p^{-1}(\bar{P}, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} X \cap \bar{P} \cap B(0,1)$, on en déduit que la famille $\left(\chi\left(\frac{1}{\varepsilon} X \cap \bar{P} \cap B(0,1)\right) \right)_{\bar{P}, \varepsilon}$ est finie, donc bornée et de plus, pour $\bar{P}$ fixé, $\lim_{\varepsilon \to 0} \chi\left(\frac{1}{\varepsilon} X \cap \bar{P} \cap B(0,1)\right)$ existe. Le théorème de convergence dominée termine la preuve. □

On sait alors attacher à un germe définissable (X,x) la suite finie d'invariants : $(1, \Lambda_1^{loc}(X,x), \dots, \Lambda_d^{loc}(X,x) = \Theta_d(X,x), 0, \dots, 0)$.

On va s'intéresser à la variation de ces invariants sur X. Si X est une variété analytique complexe, rappelons que $\Theta_d(X,x) = e(X,x)$ la multiplicité locale de X en x. On sait depuis [Hironaka, 1970] que celle-ci est constante le long des strates d'une stratification de Whitney de X. D'autre part d'après [Comte, 2000] $x \mapsto \Theta_d(X,x)$ est continue le long de strates de Verdier de X (Lipschitz d'après [Valette, 2003] et continue le long de strates de Whitney de X d'après [Valette, 2003]).

3. Les invariants polaires $\sigma_i(X,x)$.

Soit (X,x) un germe d'ensemble définissable dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout Plan P de $G(n,i)$ générique, il existe $r_P > 0$ tel que $B(\pi_P(x), s) \cap \pi_P(X \cap B(x,r))$ ne dépende pas de s pour s suffisamment petit, ou encore $\pi_P : (X,x) \longrightarrow (\pi_P(X), \pi_P(x))$ est bien définie.

Pour P un i-plan vectoriel générique, la projection $\pi_P : X \cap B(x,r) \to P$ a des fibres de caractéristique d'Euler constante au-dessus de domaines $K_1, \ldots, K_{n_P}$ adhérents à $\pi_P(x)$. On note $\chi_1, \ldots, \chi_{n_P}$ ces caractéristiques. On definit :

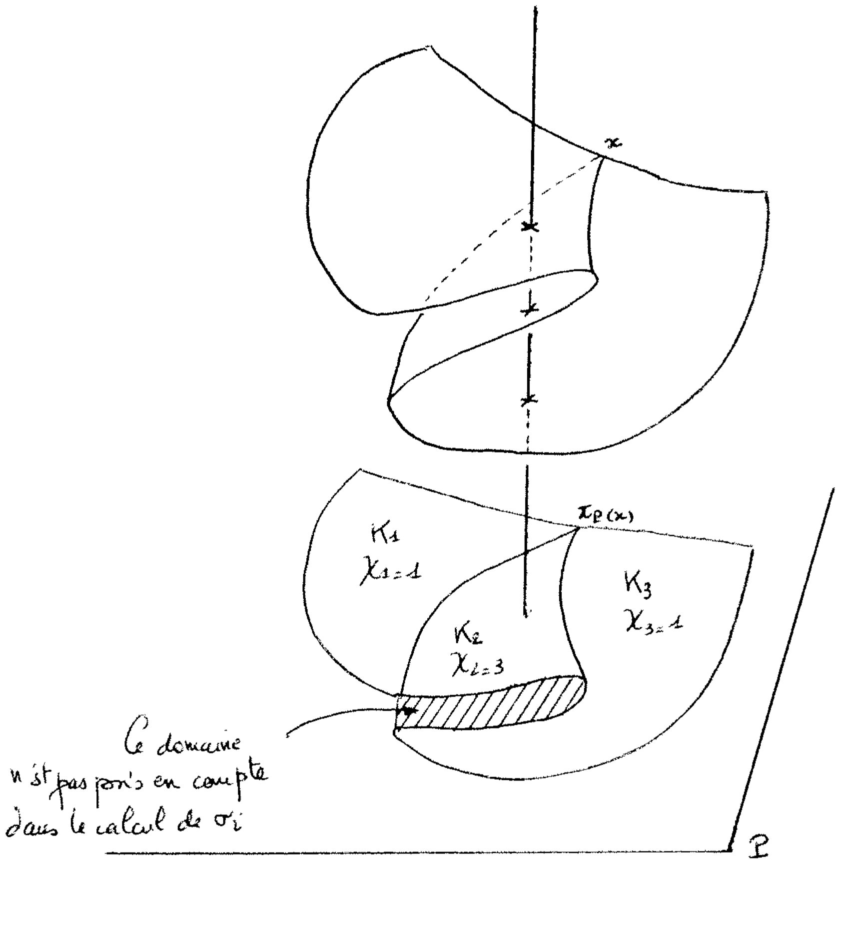
$$\sigma_i(X,x) = \int_{P \in G(n,i)} \sum_{j=1}^{n_P} \chi_j \cdot \Theta_i(K_j, \pi_{P}(x)) \, dP.$$

Ceci revient à intégrer, relativement à la densité Θ en x la fonction

$\pi_{P*} : \mathcal{C}(X,x) \to \mathcal{C}(P, \pi_{P}(x))$ où $\mathcal{C}(X,x)$ est le groupe des fonctions constructible sur le germe (X,x) et

$$\pi_{P*}(1_Z)(y) = \chi(\pi_P^{-1}(y) \cap Z \cap B(x,r)) \text{ pour } r \text{ petit.}$$

$$\sigma_i(X,x) = \int_{P \in G(n,i)} \Theta(\pi_{P*}(1_{X,x})) \, dP.$$



<u>Exemple : le cas complexe</u> : Si $X = f^{-1}(0)$ est une hypersurface à sing. isolée en 0,

$$\sigma_i(X,0) = \chi(\pi_P^{-1}(y) \cap f^{-1}(0) \cap B(0,r)) = \chi(\pi_P^{-1}(0) \cap f^{-1}(\varepsilon) \cap B(0,r))$$

$= 1 + (-1)^{n-i-1} \mu_{n-i}$ où μ_{n-i} est le nombre de Milnor de la section $(n-i)$-plane de $f^{-1}(0)$. On a donc, dans le cas où $X = f^{-1}(0)$:

$$\tilde{\sigma}_i\,(X, x) = 1 + (-1)^{n-i-1}\,\mu_{n-i}$$

Dans le cas général où (X, x) est un germe d'ensemble analytique complexe de $\mathbb{C}^n$, Kashiwara a défini :

$$E^k_{X_x} = \sum_{\substack{X_j,\ X^{\delta x} \subset \overline{X}_j \setminus X_j \\ \dim(X^\delta) < \dim(X_x)}} E^k_{\overline{X}\delta} \cdot \tilde{\sigma}_{k+\dim(X^\delta)+1}\,(X, x).$$

où (X^δ) est une stratification de Whitney de (X, x) et $X^{\delta x}$ la strate contenant x. $E^k_{X_x}$ est indépendant de x, lorsque x varie dans $X^{\delta x}$.

De plus : $(-1)^k\,(E_{X_x}^{\dim(X_x)-k-1} - E_{X_x}^{\dim(X_x)-k}) = m_x\,(P^k(X_x))$ la multiplicité locale de la variété polaire $P^k(X_x)$ en x de codimension k par [Lê-Tei, 1981-1983]

Les expressions de μ_* et $M_x(P^*(X_x))$ en fonction de $\tilde{\sigma}_*$ montrent qu'en complexe, la constance de $\tilde{\sigma}_*$ le long de strates d'une stratification donnée équivaut à celle de μ_* et de $M_x\,(P^*(X_x))$. Or on dispose des théorème suivants :

<u>Théorèmes</u> : 1- Si $X = f_t^{-1}(0)$ est une famille analytique d'hypersurfaces analytiques complexes à singularité isolée en 0, la constance de μ_* équivaut à la condition de Whitney.

[Teissier 1973] ⇒

[Bri-Speder 1976] ⇐

2- Dans le cas général, $M_x\,(P^*(X_x))$ est constante le long de strates ssi celles-ci sont des strates d'une stratification de Whitney.

[Teissier 1981, Henry-Merle 1983, Navarro 1981, Henry-Merle-Sabbah 1984 ...]

<u>En conclusion</u> : La variation des σ_i en réel doit rendre compte de la géométrie de X dans un sens proche de celui indiqué par le théorème complexe ci-dessus.

4. Comparaison des invariants σ_i et Λ_j^{loc}.

- les invariants σ_i et $\Lambda_{\dim(X)}^{loc}$ complexes suggèrent qu'ils sont de même nature. De plus il est prouvé dans [Comte, 2000] que si X est définissable de dimension d, $\Lambda_d^{loc}(X,x) = \sigma_d(X,x)$, ie

formule de Crofton locale $\quad \Theta_d(X,x) = \displaystyle\int_{P\in G(n,d)} \sum_{j=1}^{n_P} \chi^j \cdot \Theta_d(K_P^j, x)\, dP.$

Cette formule localise la formule de Crofton pour le volume :

$$Vol_d(X) = \frac{1}{\beta(n,d)} \int_{\bar{P}\in \bar{G}(n,n-d)} \#(X\cap\bar{P})\, d\bar{P}.$$

- Notons qu'en géométrie convexe les invariants σ_i et Λ_j^{loc} définissent des valuations sphériques en restriction aux cônes.

Notons $\mathcal{K}_c^n$ l'ensemble des convexes compacts de $\mathbb{R}^n$. Une application $v: \mathcal{K}_c^n \to \mathbb{R}$ est appelée une valuation ssi : $v(\emptyset)=0$ et

$v(A\cup B) = v(A)+v(B)-v(A\cap B)$ (lorsque $A\cup B$ est convexe).

On dit qu'une valuation est invariante ssi $\forall g\in$ Isométries$(\mathbb{R}^n)$ $\forall V\in\mathcal{K}_c^n$, $v(g.V)=v(V)$. On dit que v est continue lorsque v est continue relativement à la métrique de Hausdorff.

Théorème [Hadwiger, 1957]. L'ensemble des valuations continues, invariantes, de $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel dont une base est $(\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$.

(Q) Question l'équivalent sphérique de ce théorème est-il vrai ? [Gruber-Schneider, 1979]

Si K est un convexe sphérique et $\hat{K}$ son cône en 0, $v(K)=\sigma_i(\hat{K},0)$ et $w(K)=\Lambda_i^{loc}(\hat{K})$ sont deux valuations sphériques invariantes et continues

Si la question (Q) a une réponse positive on en déduit immédiatement que σ_i est une combinaison linéaire des Λ_i^{loc} pour les cônes convexes définissables.

La question (Q) est sans réponse pour S^n (911), $n \geq 3$.

Dans ce sens, on montre que :

Théorème : Il existe une matrice triangulaire supérieure M avec des 1 sur sa diagonale, telle que : $\forall X$ définissable dans $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(X,x) \\ \vdots \\ \sigma_n(X,x) \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} \Lambda_1^{loc}(X,x) \\ \vdots \\ \Lambda_n^{loc}(X,x) \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & m_1^2 & \cdots & m_1^n \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & m_n^n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } m_i^j = \frac{\alpha_j}{\alpha_{j-i} \cdot \alpha_i} \binom{i}{j} - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_{j-1-i} \cdot \alpha_i} \binom{i}{j-1}, \quad i+1 \leq j \leq n$$

Proof : 1. The theorem is true for X a definable cône of vertex x.
On montre en effet que chaque σ_i et chaque Λ_j^{loc} est combinaison linéaire des valuation sphériques équivalents à Λ_i.

2. On déforme (X,x) sur son cône tangent □

5. Conditions de régularité.

Cône normal : Soit $Y = \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k} \subseteq X$ et $C(X,Y) = \mathrm{Adh}\{(y,l,u) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}_+^* ;$
$(y, ul) \in X \setminus Y\}$

$\pi : C(X,Y) \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $\pi^{-1}(0) = C_Y X$ le cône normal de X le long de Y.
$(y,l) \in C_Y X$ ssi l est limite de sécantes normales à Y en x.

$(C_Y X)_y$ est l'ensemble des limites de sécantes à X normales à Y

- Si Y est une strate de Whitney, $\dim((C_Y X)_y) \leq d-k$, $\forall y \in Y$.
- si $\dim((C_Y X)_y) \leq d-k$, $\exists\ Q_y$ dense dans $G(n,d)$ / $\forall P \in Q_y$ $\exists\ \mathcal{U}_{y,P}$ voisinage ouvert de y dans $\mathbb{R}^n$ / $(X \cap \mathcal{U}_{y,P}) \cap \pi_P^{-1}(\pi_P(Y)) = Y$.

Dans le cas complexe, on dispose du théorème suivant :

Théorème : Soit X un ensemble analytique complexe de $\mathbb{C}^n$ et $Y \subseteq X$ lisse.

1. $\forall y \in Y$ $\dim((C_Y X)_y) \leq \dim(X) - \dim(Y) = d-k$ si X est équimultiple le long de Y. Conséquence : X est équimultiple le long de Y si (b).

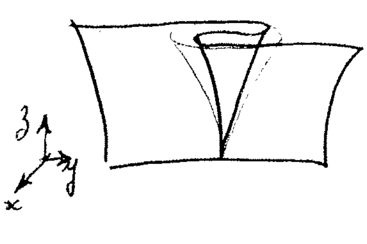
2. $(w) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow \dim((C_Y \Delta_{X_y}(P))_y \leq i-1-\dim(Y)$ $\forall y \in Y$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.
   ie $\Delta_{X_y(P)}$, le discriminant de X relatif à π_P est équimultiple le long de Y.

Théorème : Soit X un ensemble définissable de $\mathbb{R}^n$, de dimension d et Y une strate de dimension k d'une stratification Σ de X.

1. Si pour $i \in \{\dim(Y)+1, \dots, n\}$, $\forall P$ générique dans $G(n,i)$ $\dim((C_Y \Delta_{X_y}(P))_y) \leq i-1-\dim(Y)$, $\forall y \in Y$, alors σ_i est continue le long de Y.

2. $\forall i \in \{\dim(Y)+1, \dots, n\}$, $\forall P$ générique dans $G(n,i)$ $\dim((C_Y \Delta_{X_y}(P))_y) \leq i-1-\dim(Y), \forall y \in Y$ lorsque Σ est (w)-régulière. En particulier, $(w) \Rightarrow \sigma_i$ et Λ_j^{loc} sont continus le long des strates.

Commentaire : le théorème ci-dessus est l'analogue réel du théorème de Briançon-Speder et du théorème $(w) \Leftrightarrow$ équimultiplicité des variétés polaires. La réciproque σ_i et Λ_j continus $\Rightarrow$ (w) régularité n'est pas vraie en réel. Par exemple : $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ yz^3 = x^3 - 3z^3x,\ z \geq 0\}$, $Y = O_y$



- $\sigma_1(X_y) = 1$ $\forall y \in Y$
- $\sigma_2(X_y) = \frac{1}{2}$ $\forall y \in Y$

Mais $((X \setminus Y), Y)$ n'est pas même (a)-régulier.