ÉQUISINGULARITÉ RÉELLE : INVARIANTS LOCAUX ET CONDITIONS DE RÉGULARITÉ

Georges COMTE & Michel MERLE

1- Bonne Présentation d'un germe X_0 relativement à une direction de projection

2- Invariants polaires $\sigma_i(X_0)$

3- Bonne présentation d'un germe X_0 le long d'une strate

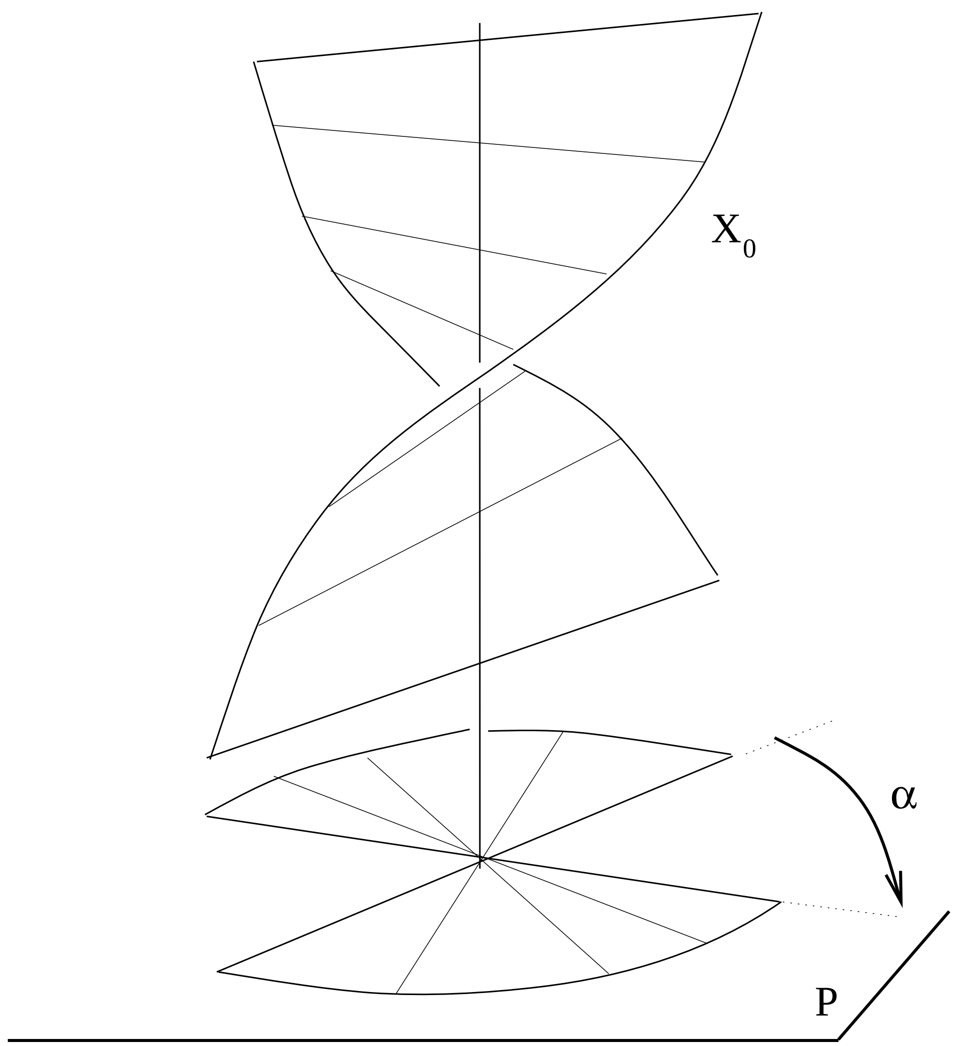
4- Conditions de régularité et cône normal

5- Invariants de Lipschitz-Killing locaux $\Lambda_i^{\ell oc}(X_0)$

Notations. X est un ensemble sous-analytique compact de $\mathbb{R}^n$ muni d'une stratification $(X^j)_{j\in\{0,\cdots,k\}}$,
$G(i,n)$ la Grassmannienne des i plans vectoriels de $\mathbb{R}^n$,
$\bar{G}(i,n)$ la Grassmannienne des i plans affines de $\mathbb{R}^n$,
π_P la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur P, pour $P \in G(i,n)$

1- Bonne Présentation d'un germe X_0 relativement à une direction de projection

Étant donné $P \in G(i,n)$ il n'est pas sûr que $\pi_P(X_0)$ soit bien définie.
Par exemple :



Soit $\mathcal{P}_{X^j}(P)$ l'adhérence de l'ensemble des points critiques de $\pi_{P|X^j}$. Lorsque $i \leq \dim(X^j)$:

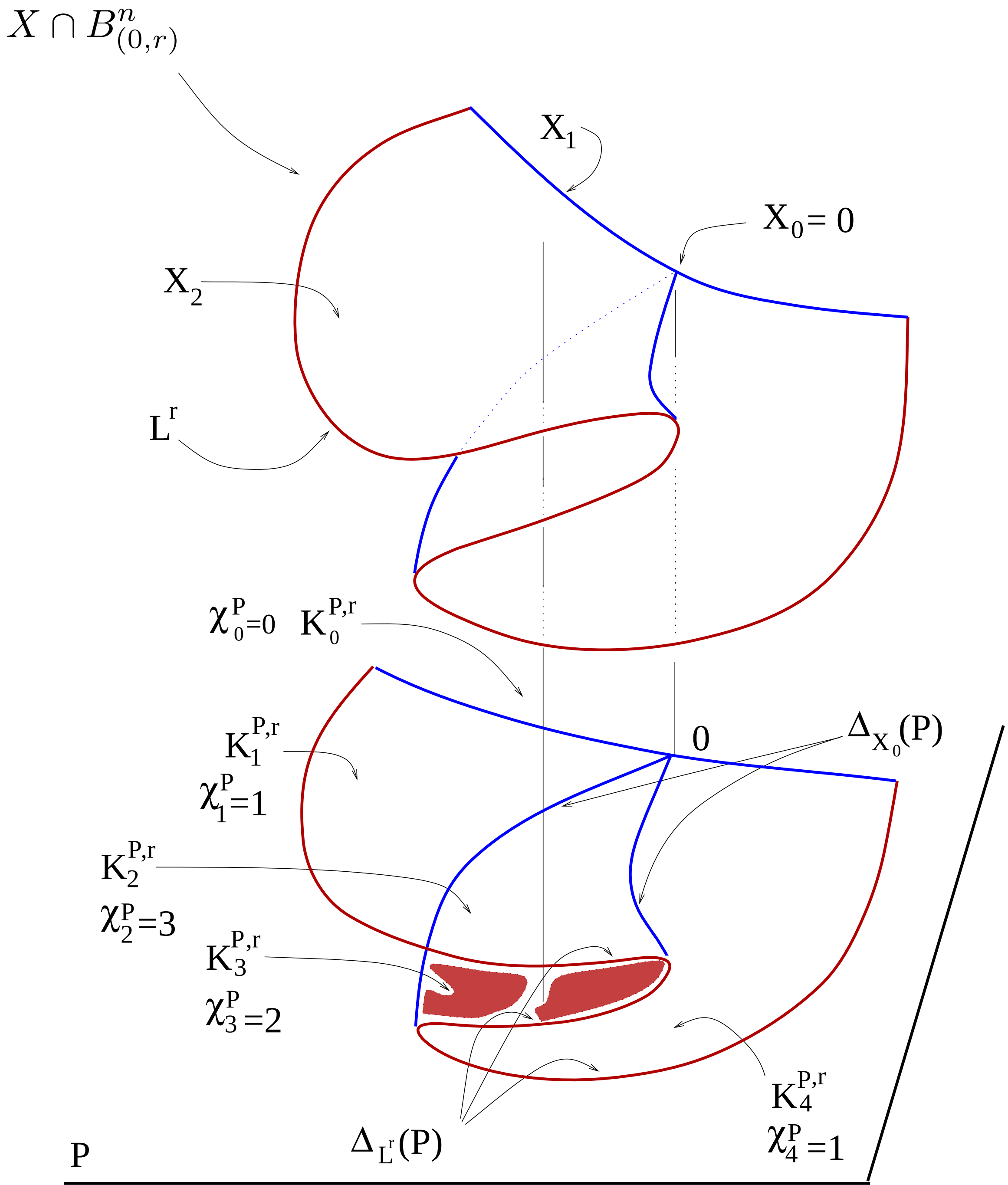
- $\mathcal{P}_{X^j}(P) = \mathrm{adh}\{x \in X^j;\ \dim(\mathrm{T}_x X^j \cap P^\perp) \geq \dim(X^j) - i + 1\}$,
- et lorsque $d < i$: $\mathcal{P}_{X^j}(P) = \mathrm{adh}(X^j)$. (en bleu sur la figure qui suit)

Pour $r > 0$, on note :

- $\mathcal{D}^r_{X^j}(P) = \pi_P(\mathcal{P}_{X^j \cap B(0,r)}(P))$,
- $\mathcal{D}^r_{X_0}(P) = \bigcup_{j=0}^{k} \mathcal{D}_{X^j \cap B(0,r)}(P)$ (en bleu sur la figure qui suit)
- $L^r_{X^j} = X^j \cap S(0,r)$ et $\mathcal{D}_{L^r_{X^j}} = \pi_P(\mathcal{P}_{L^r_{X^j}}(P))$ (en rouge sur la figure qui suit).

Théorème . — *Supposons $(X^j)_{j\in\{0,\cdots,k\}}$ (b)-régulière. Il existe un ensemble sous-analytique $\mathcal{E}^i_X$ dense dans $G(i,n)$ tel que quel que soit $P \in \mathcal{E}^i_X$, les germes :*

- $\left[\pi_P(X \cap B(0,r))\right]_0$ et $[\mathcal{D}^r_{X_0}(P)]_0$ ne dépendent pas de $r = r(P) << 1$, - et $\forall j,\ dist(\mathcal{D}_{L^r_{X^j}}(P), 0) > 0$,
On note $\mathcal{K}^P_1, \cdots, \mathcal{K}^P_{n_P}$ les composantes connexes de $\left[\pi_P(X \cap B(0,r))\right]_0 \setminus [\mathcal{D}^r_{X_0}(P)]_0$. Alors :
- Les caractéristiques $\chi^P_j = \chi(\pi_P^{-1}(y) \cap X \cap B(0,r))$, $y \in \mathcal{K}^P_j$, $0 << \|y\| << r$ ne dépendent pas de $y \in \mathcal{K}^P_j$, ni de r.



$X \cap B^n_{(0,r)}$
X_1
$X_0 = 0$
X_2
L^r
$\chi^P_0=0$ $K^{P,r}_0$
$K^{P,r}_1$
$\chi^P_1=1$
0
$\Delta_{X_0}(P)$
$K^{P,r}_2$
$\chi^P_2=3$
$K^{P,r}_3$
$\chi^P_3=2$
$K^{P,r}_4$
$\chi^P_4=1$
$\Delta_{L^r}(P)$
P

2- Invariants polaires $\sigma_i(X_0)$

On note pour un germe $\mathcal{K}_0$ en 0 de sous-analytique de $\mathbb{R}^i$:

$$\Theta_i(\mathcal{K}_0) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{Vol_i(\mathcal{K} \cap B(0,\epsilon))}{Vol_i(B^i(0,\epsilon))}$$

On définit :

$$\sigma_i(X_0) = \int_{P \in G(i,n)} \sum_{j=1}^{n_P} \chi_j^P \cdot \Theta_i(\mathcal{K}_j^P) \ \ dP$$

On note : $\sigma_*(X_0) = (\sigma_0(X_0), \cdots, \sigma_n(X_0))$.

Remarques. • Si $d = \dim(X_0)$ et si d_0 est la dimension de la strate de Whitney contenant 0, on a :

$$\sigma_*(X_0) = (1, \cdots, 1, \sigma_{d_0+1}(X_0), \cdots, \sigma_d(X_0) = \Theta_d(X_0), 0 \cdots, 0).$$

• Si X est analytique complexe :

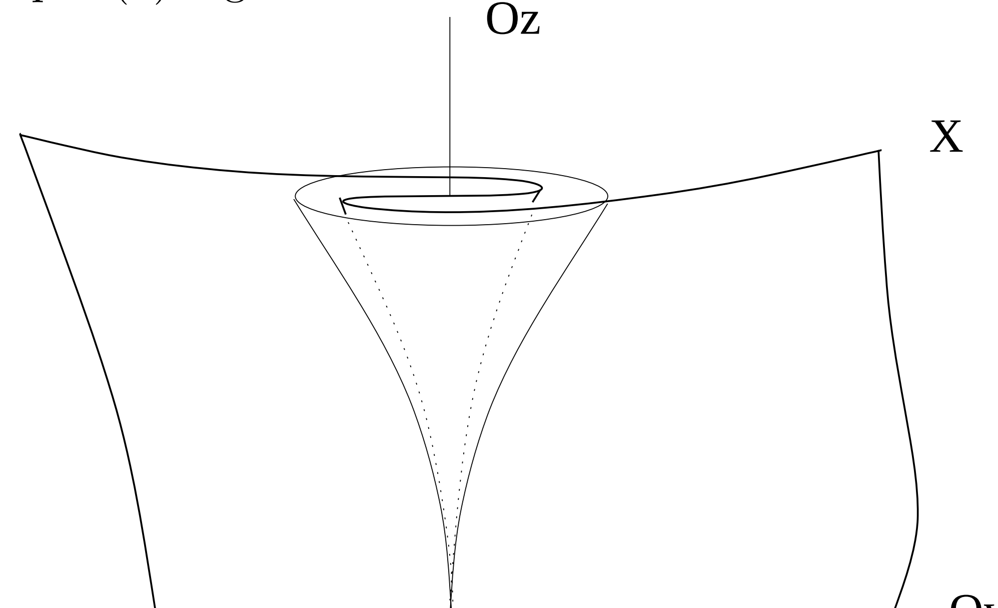
- Dans le cas où X_0 est une hypersurface à singularité isolée : $\sigma_i(X_0) = 1 + (-1)^{n-i-1}\mu_{n-i}$, où μ_{n-i} est le le nombre de Milnor de la section $(n-i)$-plane de X_0.

- Dans le cas général σ_* est comb. lin. des caractéristiques évanescentes de Kashiwara qui sont elles-même des comb. lin. des multiplicités des variétés polaires.

Théorème . — (Briançon-Speder 1976, Henry-Merle 1981, Navarro 1981, Teissier 1981, Lê-Teissier 1981) *Soit* X_0 *un germe en* 0 *d'ensemble analytique complexe de* $\mathbb{C}^n$ *muni d'une stratification* $(X^j)_{j\in\{0,\cdots,k\}}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) La stratification $(X^j)_{j\in\{0,\cdots,k\}}$ *est de Whitney.*
(ii) Les fonctions $y \mapsto e(\mathcal{P}^k(X_y), y)$ *en restriction aux strates* X^j *sont constantes.*
(iii) Les fonctions $y \mapsto e(\mathcal{D}^k(X_y), y)$ *en restriction aux strates* X^j *sont constantes.*
(iv) Les fonctions $y \mapsto \sigma_i(X_y)$ *en restriction aux strates* X^j *sont constantes.*

Remarque. En réel $(iv) \Longrightarrow (i)$ n'a pas lieu. Par exemple pour $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; yz^3 = x^3 - 3z^3x,\ z \geq 0\}$, et $Y = Oy$, σ_* est constante le long de Y : $\sigma_1(X_y) = 1$ et $\sigma_2(X_y) = 1/2$, mais (Y,X) n'est pas (a)-régulière.

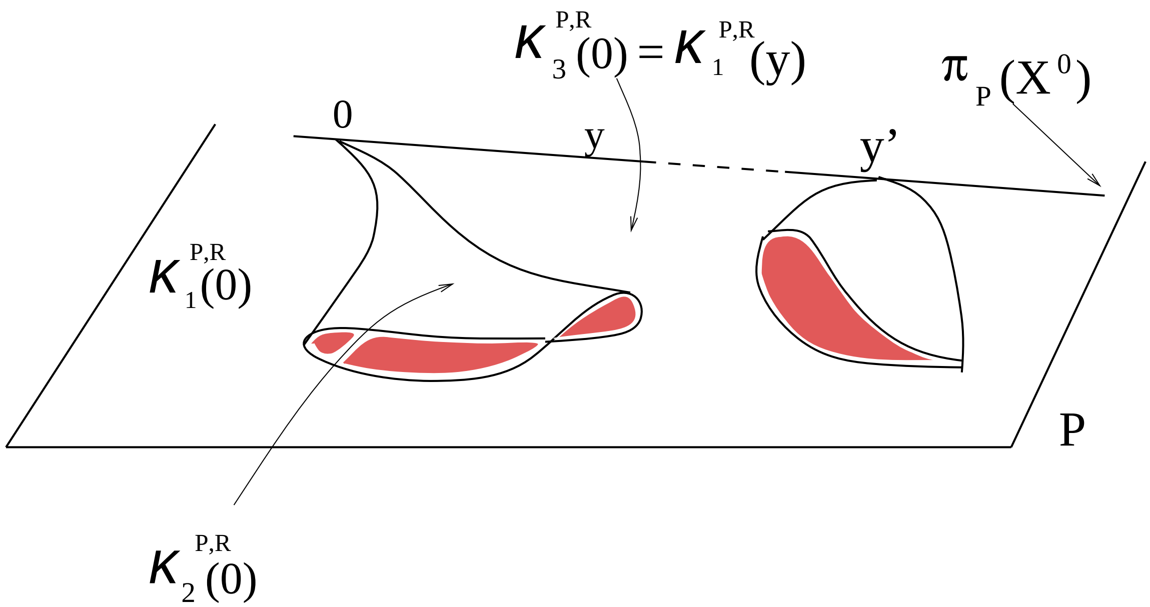


3- Bonne présentation le long d'une strate

Théorème. — *Supposons* $(X^j)_{j\in\{0,\cdots,k\}}$ (b^*)*-régulière. Soit* X^0 *la strate contenant* 0*. Il existe un ensemble sous-analytique* $\mathcal{F}^i_X$ *dense dans* $G(i,n)$ *tel que quel que soit* $P \in \mathcal{F}^i_X$ *existe un voisinage* $\mathcal{U}(P)$ *de* 0 *dans* $\mathbb{R}^n$ *et* $R > 0$ *avec :*

- Les germes X_y*,* $y \in X^0 \cap \mathcal{U}$ *sont bien présentés relativement à* π_P*, les distances* $\mathrm{dist}(\mathcal{D}_{L^R_{X^j}}(y), y)$ *ne tendent pas vers* 0 *quand* $y \to 0$*,*

- Les domaines $\mathcal{K}^P_*(y)$ *sont à choisir parmi les* $\mathcal{K}^P_*(0)$ *et les caractéristiques* $\chi^P_*(X_y)$ *se calculent par* $B(0,R) \cap \pi_P^{-1}(z) \cap X$*, pour* $\|z - y\| << 1$.



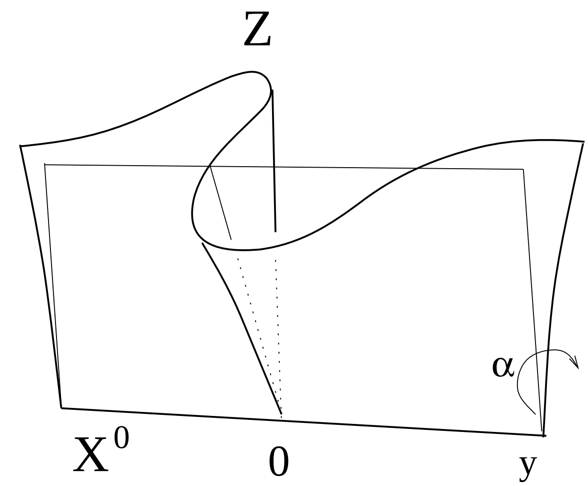
Corollaire. — *sur* $\mathbb{C}$ *:* $(w) \Longleftrightarrow (b)$ *et il existe un seul domaine* $\mathcal{K}^P(0)$*, une seule caractéristique* $\chi^P(0) = \chi^P(y)$*, d'où* $(i) \Longrightarrow (iv)$*.*

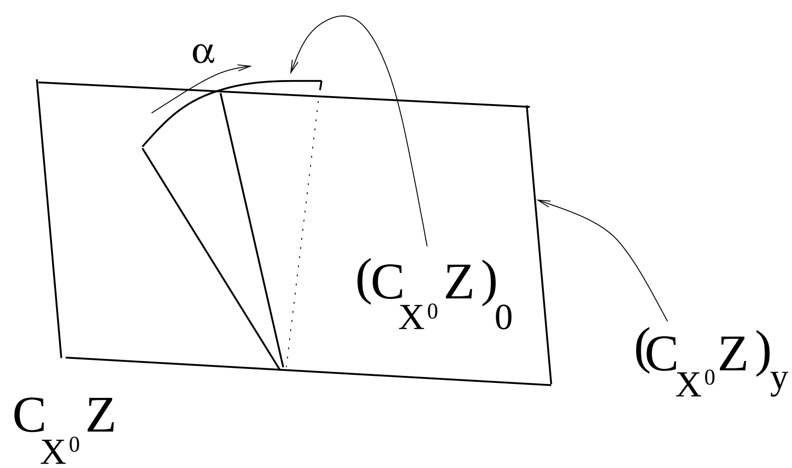
Corollaire. — *Sur* $\mathbb{R}$ *il suffit de prouver la continuité de* $X^0 \ni y \mapsto \Theta_i(\mathcal{K}^P_*(0), y)$ *pour prouver celle de* $X^0 \ni y \mapsto \sigma_i(X_y)$*.*

4- Conditions de régularité et cône normal

On note $C_{X^0}Z$ le cône normal de l'ensemble $Z \subset \mathbb{R}^n$ le long de X^0. Il s'agit du diviseur exceptionnel de l'éclatement de Z le long de X^0. On dispose de $p : C_{X^0}Z \to X^0$ dont les fibres $p^{-1}(y) := (C_{X^0}Z)_y \in (X^0)^\perp$ sont les limites en y de sécantes à Z qui sont normales à Y.

Exemple.





Remarque. Si X^0 et Z sont deux strates de Whitney, $(C_{X^0}Z)_y = C_y(Z \cap (X^0)^\perp)$.

Théorème. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^i$, et $0 \in X^0 \subset \partial\Omega$ lisse.*

- $X^0 \ni y \mapsto \Theta_i(\Omega_y)$ est continue dès que $\dim((C_{X^0}\partial\Omega)_y) \leq \dim(\partial\Omega) - \dim(X^0)$, pour les y voisins de 0 dans X^0.

- En particulier $X^0 \ni y \mapsto \sigma_i(X_y)$ est continue dès que pour P générique, $\dim((C_{X^0}\mathcal{D}_{X^0}(P))_y) \leq i - 1 - \dim(X^0)$.

- Cette dernière condition est réalisée lorsque X^0 est une strate d'une stratification (w)-régulière : σ_* est continue le long de strates de Verdier.

5- Invariants de Lipschitz-Killing locaux

Posons : $\mathcal{T}_r(X) = \bigcup_{x\in X} B_{(x,r)}$ et :

$$\mathcal{V}_X(r) = \int_{x\in\mathcal{T}_r(X)} \chi(X \cap B_{(x,r)})\ dx.$$

Lorsque X est lisse et pour r suffisament petit :

$$\mathcal{V}_X(r) = \int_{x\in\mathcal{T}_r(X)} dx = Vol_n(\mathcal{T}_r(X)).$$

Quel que soit $r \geq 0$, $\mathcal{V}_X(r)$ est un polynôme de degré n en la variable r, que nous notons :

$$\mathcal{V}_X(r) = \sum_{i=0}^{n} \Lambda_{n-i}(X).\alpha_i.r^i,$$

où α_i est $Vol_i(B^i(0,1))$. On appelle $\Lambda_i(X)$ le i^{eme} invariant de Lipschitz-Killing de X. En particulier on montre :

$$\Lambda_i(X) = \int_{\bar{P}\in\bar{G}(n-i,n)} \chi(X \cap \bar{P})\ \ \frac{d\bar{P}}{\beta(n,i)},$$

de sorte que $\Lambda_*(X) = (\chi(X), \cdots, Vol(X), 0, \cdots, 0)$.

Théorème . — *Les limites :*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\alpha_i . \epsilon^i} \Lambda_i(X \cap B^n_{(0,\epsilon)}) := \Lambda_i^{\ell oc}(X_0)$$

existent. On appelle $\Lambda_*^{\ell oc}(X_0)$ les invariants de Lipschitz-Killing locaux de X_0.

Remarque. Lorsque X_0 est un cône convexe, $X = \mathbb{R}_+ \cdot K$, avec $K \in S(0,1)$, K convexe, les applications $K \mapsto \Lambda_i^{\ell oc}(X_0)$ et $\sigma_i(X_0)$ sont des valuations, ie des applications additives, invariantes pas rotation. Dans le cas euclidien les valuations forment un espace dont une base est Λ_*.

Théorème . — *il existe une matrice triangulaire supérieure $(m_i^j)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ telle que :*

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1^{\ell oc} \\ \vdots \\ \Lambda_n^{\ell oc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m_1^2 & \dots & m_1^{n-1} & m_1^n \\ 0 & 1 & \dots & m_2^{n-1} & m_2^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix}$$

De plus : $m_i^j = \dfrac{\alpha_j}{\alpha_{j-i} \cdot \alpha_i} C_j^i - \dfrac{\alpha_{j-1}}{\alpha_{j-1-i} \cdot \alpha_i} C_{j-1}^i, \quad$ *si* $i + 1 \leq j \leq n$.

Corollaire . — *Comme la suite σ_*, la suite $\Lambda_*^{\ell oc}$ est continue le long de strates de Verdier.*