MATH502 - Devoir 1

On considère l'arc paramétré $\gamma = (\mathbb{R}^*, f)$ de $\mathbb{R}^2$ où $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^2$ est l'application définie par

$$f(t) = (\frac{t - \sin t}{t^2}, \frac{1 - \cos t}{t^2}).$$

On note $\mathscr{S}$ le support de γ.

1. Pourquoi suffit-il d'étudier cet arc sur $]0, +\infty[$ en vue de tracer $\mathscr{S}$? L'arc γ admet-il des branches infinies ?

2. Donner le tableau de variations des deux composantes de f. Indiquer les paramètres t en lesquels γ possède des tangentes horizontales.

(Indication. Pour déterminer le signe des dérivées des composantes de f', on aura intérêt à simplifier leur expression à l'aide des formules $1 + \cos t = 2\cos^2 \frac{t}{2}$, $1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}$ et $\sin t = 2\cos \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2}$. On pourra ensuite étudier une fonction auxiliaire).

3. Donner les points singuliers de γ et étudier l'allure de $\mathscr{S}$ au voisinage de ces points.

4. Donner l'équation de la tangente en ces points. Montrer que ces tangentes passent toutes par un même point $(0, \frac{1}{2})$ de l'axe Oy.

5. Montrer que les points singuliers de γ sont tous situés sur un même cercle dont on donnera le centre et le rayon.

6. Donner la courbure de γ en chacun des points de tangente horizontale, ainsi que le centre de courbure.

7. Représenter $\mathscr{S}$.

Corrigé

1. L'arc γ est un arc C^∞ de $\mathbb{R}^2$. Notons $x(t) = \dfrac{t-\sin t}{t^2}$ et $y(t) = \dfrac{1-\cos t}{t^2}$. Quel que soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ de sorte que le support $\mathscr{S}_-$ du sous-arc $\gamma_{\restriction \mathbb{R}_-^*}$ est le l'image du support $\mathscr{S}_+$ du sous-arc $\gamma_{\restriction \mathbb{R}_+^*}$ par la symétrie d'axe Oy et de direction Ox. Il suffit donc pour tracer $\mathscr{S}$ de tracer $\mathscr{S}_+$.

Les branches infinies de γ sont à rechercher pour le paramètre 0 et en $+\infty$. Or, les développements limités des fonctions sin et cos à l'ordre 3 montrent que $\lim_{t\to 0} x(t) = 0$ et $\lim_{t\to 0} y(t) = \dfrac{1}{2}$. Et d'autre part $\lim_{t\to+\infty} f(t) = (0,0)$. L'arc n'admet donc pas de branches infinies.

2. Quel que soit $t > 0$, on a

$$x'(t) = \frac{-t(1+\cos t) + 2\sin t}{t^3},\ y'(t) = \frac{t^2 \sin t - 2t(1-\cos t)}{t^3}.$$

En utilisant $1+\cos t = 2\cos^2 \frac{t}{2}$, $1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$ et $\sin t = 2\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}$, on obtient

$$x'(t) = \frac{2\cos\frac{t}{2}}{t^3}(2\sin\frac{t}{2} - t\cos\frac{t}{2}),\ y'(t) = \frac{2\sin\frac{t}{2}}{t^3}(t\cos\frac{t}{2} - 2\sin\frac{t}{2})$$

Et donc

$$x'(t) = \frac{2\cos\frac{t}{2}}{t^3}h(t),\ y'(t) = \frac{-2\sin\frac{t}{2}}{t^3}h(t),$$

où

$$h(t) = 2\sin\frac{t}{2} - t\cos\frac{t}{2}.$$

Étudions le signe de $x'(t)$ et pour cela étudions le signe de $h(t)$. On a

$$h'(t) = t\sin t/2,$$

donc

— sur les intervalles $[4k\pi, 4k\pi + 2\pi], k \in \mathbb{Z}_+^*$: $h'(t) \geq 0$ et $h(4k\pi) = -4k\pi < 0$, $h(4k\pi+\pi) = 2 > 0$. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires h ne s'annule qu'une fois sur $[4k\pi, 4k\pi+\pi]$, en α_k.

— sur les intervalles $[4k\pi+2\pi, 4(k+1)\pi], k \in \mathbb{Z}_+^* : h'(t) \leq 0$ et $h(4k\pi+2\pi) = 4k\pi+2\pi > 0$, $h(4k\pi+3\pi) = -2 < 0$. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires h ne s'annule qu'une fois sur $[4k\pi+2\pi, 4k\pi+3\pi]$, en β_k.

— sur l'intervalle $[0, 4\pi]$: $h'(t) \geq 0$ sur $[0, 2\pi]$, $h(0) = 0$, $h(2\pi) = 2\pi$ et $h'(t) \leq 0$ sur $[2\pi, 4\pi]$, $h(2\pi) = 2\pi$, $h(4\pi) = -4\pi$, donc h ne s'annule qu'une fois sur $[2\pi, 3\pi]$, en β_0.

En conclusion le tableau de variations de h est le suivant, pour $k \in \mathbb{Z}_+^*$

t	$4k\pi$		α_k		$(4k+1)\pi$		$(4k+2)\pi$		β_k		$(4k+3)\pi$		$(4k+4)\pi$
$h'(t)$	0	+		+		+	0	−		−		−	0
$h(t)$	$-4k\pi$		0		2		$(4k+2)\pi$		0		-2		$-(4k+4)\pi$

D'autre part $\cos t/2 \geq 0 \iff t \in [4k\pi + 3\pi, 4k\pi + 5\pi]$, ce qui donne le tableau de variations suivant de $t \mapsto x(t)$, pour $k \in \mathbb{Z}_+^*$

t	$4k\pi$		α_k		$(4k+1)\pi$		β_k		$(4k+3)\pi$		$(4k+4)\pi$
$h(t)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\cos \frac{t}{2}$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$x(t)$	$\frac{1}{4k\pi}$	$\searrow$	a_k	$\nearrow$	$\frac{1}{(4k+1)\pi}$	$\searrow$	b_k	$\nearrow$	$\frac{1}{(4k+3)\pi}$	$\searrow$	$\frac{1}{(4k+4)\pi}$

On obtient de la même manière le tableau de variations de $t \mapsto y(t)$, pour $k \in \mathbb{Z}_+^*$

t	$4k\pi$		α_k		$(4k+1)\pi$		$(4k+2)\pi$		β_k		$(4k+3)\pi$		$(4k+4)\pi$
$h(t)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$-\sin \frac{t}{2}$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0
$y'(t)$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0
$x(t)$	$\frac{1}{4k\pi}$	$\searrow$	a_k	$\nearrow$	$\frac{1}{(4k+1)\pi}$	$\searrow$		$\searrow$	b_k	$\nearrow$	$\frac{1}{(4k+3)\pi}$	$\searrow$	$\frac{1}{(4k+4)\pi}$
$y(t)$	0	$\nearrow$	u_k	$\searrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	v_k	$\searrow$		$\searrow$	0

Et sur $[0, 4\pi]$, on a par ailleurs les variations

t	0		π		2π		β_0		3π		4π
$h(t)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$-\sin\frac{t}{2}$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0
$\cos\frac{t}{2}$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$y'(t)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\pi}$	$\searrow$	$\frac{1}{2\pi}$	$\searrow$	b_0	$\nearrow$	$\frac{1}{3\pi}$	$\searrow$	$\frac{1}{4\pi}$
$y(t)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{2}{\pi^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	v_0	$\searrow$	$\frac{2}{9\pi^2}$	$\searrow$	0

Si l'arc γ possède une tangente horizontale au paramètre t, nécessairement $y'(t) = 0$. En effet, sinon $f'(t) \neq 0$ et le vecteur $f'(t)$ qui dirige la tangente à γ en $f(t)$ possède une seconde composante non nulle, ce qui exclut une tangente horizontale. Les paramètres en lesquels y s'annule sont $2\pi, \beta_0, 4\pi, \alpha_1, 6\pi, \beta_1, 8\pi, \ldots, 4k\pi, \alpha_k, (4k+2)\pi, \beta_k, \ldots$ parmi ceux-ci, les paramètres pour lesquels x' ne s'annule pas garantissent une tangente horizontale. Ce sont les paramètres :

$$2\pi, 4\pi, \ldots, 4k\pi, (4k+2)\pi, \ldots = \{t_p = 2p\pi; p \in \mathbb{Z}_+^*\}.$$

En ces points t_p, on a $f(t_p) = (\dfrac{1}{2p\pi}, 0)$.

En les points $\beta_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_k, \ldots$ à la fois x' et y' s'annulent. Pour déterminer les tangentes en ces points singuliers (qui pourraient très bien être horizontales), il faut pousser l'étude aux dérivées supérieures et déterminer l'allure locale du support (cf question 3).

3. Étudions donc γ en les paramètres α_k, β_k. Ces points sont caractérisés par $h(\alpha_k) = h(\beta_k) = 0$, $\alpha_k \in]4k\pi, (4k+1)\pi[$ et $\beta_k \in](4k+2)\pi, (4k+3)\pi[$. Pour simplifier, dans toute la suite, notons indifféremment α un paramètre α_k ou β_k. On a

$$h(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}. \tag{1}$$

Maintenant comme $x'(t) = \dfrac{2\cos\frac{t}{2}}{t^3}h(t)$, $y'(t) = \dfrac{-2\sin\frac{t}{2}}{t^3}h(t)$ et $h'(t) = t\sin\frac{t}{2}$, on a

$$x''(t) = (\frac{2\cos\frac{t}{2}}{t^3})'h(t) + \frac{2\cos\frac{t}{2}}{t^3}h'(t), \text{ et donc } x''(\alpha) = \frac{2}{\alpha^2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{\alpha^2} \neq 0.$$

$$y''(t) = (\frac{-2\sin\frac{t}{2}}{t^3})'h(t) + \frac{-2\sin\frac{t}{2}}{t^3}h'(t), \text{ et donc } y''(\alpha) = \frac{-2}{\alpha^2}\sin^2\frac{\alpha}{2} \neq 0.$$

La tangente T_α à γ en les points singuliers α est donc dirigée par

$$f''(\alpha) = (\frac{2}{\alpha^2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}, \frac{-2}{\alpha^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}),$$

ou encore par

$$(\cos\frac{\alpha}{2}, -\sin\frac{\alpha}{2}) = (\cos\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}),$$

et finalement par

$$\vec{\tau} = (1, -\frac{\alpha}{2}). \tag{2}$$

En particulier la pente de T_α étant $\frac{-\alpha}{2}$, la tangente T_α tend à devenir verticale lorsque $\alpha \to +\infty$.

Pour déterminer la nature des points singuliers α, on dérive une fois de plus les composantes x et y de f. On obtient

$$x'''(t) = (\frac{2\cos\frac{t}{2}}{t^3})''h(t) + 2(\frac{2\cos\frac{t}{2}}{t^3})'h'(t) + \frac{2\cos\frac{t}{2}}{t^3}h''(t)$$

$$x'''(\alpha) = 2(\frac{2\cos\frac{t}{2}}{t^3})'(t=\alpha)h'(\alpha) + \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{\alpha^3}h''(\alpha) = \frac{-2}{\alpha^3}(2\sin\alpha + \alpha\sin^2\frac{\alpha}{2})$$

$$y'''(\alpha) = 2(\frac{-2\sin\frac{t}{2}}{t^3})'(t=\alpha)h'(\alpha) + \frac{-2\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha^3}h''(\alpha) = \frac{-2}{\alpha^3}(\frac{3}{4}\alpha\sin\alpha - 5\sin^2\frac{\alpha}{2}).$$

On vérifie que $f''(\alpha)$ et $f'''(\alpha)$ sont linéairement indépendants. On en conclut qu'en α l'arc γ possède un point de rebroussement de première espèce.

4. On a

$$m_\alpha = f(\alpha) = (\frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha^2}, \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}). \tag{3}$$

L'équation de la tangente T_α à γ en m_α, qui est dirigée par $\vec{\tau} = (1, -\frac{\alpha}{2})$ d'après (2), est donc

$$Y - \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2} = -\frac{\alpha}{2}(X - \frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha^2})$$

$$Y = -\frac{\alpha}{2}X + \frac{1}{2} + \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2} - \frac{\sin\alpha}{2\alpha}.$$

Or en utilisant $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ et $\sin\alpha = 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$, on a

$$\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2} - \frac{\sin\alpha}{2\alpha} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha^2} - \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}.$$

Puis en utilisant (1), on en déduit que

$$\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2} - \frac{\sin\alpha}{2\alpha} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha^2} - \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha^2} = 0.$$

On en conclut que la tangente T_α a pour équation

$$Y = -\frac{\alpha}{2}X + \frac{1}{2}.$$

Quel que soit α, T_α passe donc par le point $(0, \frac{1}{2})$ de Oy.

5. Pour α un paramètre tel que $f'(\alpha) = \vec{0}$ (ie $\alpha = \alpha_k$ ou $\alpha = \beta_k$), on a d'après (3),

$$m_\alpha = (\frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha^2}, \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}).$$

On a alors d'une part, toujours d'après (1),

$$\frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha^2} = \frac{\alpha - 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha^2} = \frac{\alpha - \alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha^2} = \frac{1 - 1\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$$

$$= \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha} = \frac{\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha} = \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}\sin\alpha.$$

Et d'autre part encore d'après (1)

$$\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha^2} = \frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}(1+\cos\alpha).$$

En conclusion

$$m_\alpha = (\frac{1}{4}\sin\alpha, \frac{1}{4}(1+\cos\alpha)),$$

de sorte que

$$x^2(\alpha) + (y(\alpha) - \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{4^2}.$$

Il s'ensuit que les points singuliers m_α sont tous sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre $(0, \frac{1}{4})$ et de rayon $\frac{1}{4}$.

6. Les points en lesquels γ admet une tangente horizontale sont les points $f(2p\pi) = (\frac{1}{2p\pi}, 0)$, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, d'après la question 2.

Orientons le plan par la base canonique. Le rayon de courbure algébrique en ces points est donné par $R(t_p) = \frac{\|f'(t_p)\|}{\det(f'(t_p), f''(t_p))}$. Le déterminant étant alors celui de la matrice des coordonnées de $f'(t_p)$ et de $f''(t_p)$ dans la base canonique (ou dans toute autre base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ et dans l'orientation de la base canonique, par invariance du déterminant dans une base orthonormée quelconque d'une même classe d'orientation...). On a

$$f'(t) = \frac{1}{t^3}(-t - t\cos t + 2\sin t, -2 + t\sin t + 2\cos t)$$

$$f''(t) = \frac{1}{t^3}(2 + 4\cos t + t\sin t - \frac{6\sin t}{t}, -4\sin t + t\cos t + \frac{6}{t} - \frac{6\cos t}{t}).$$

Et donc

$$f'(2p\pi) = \frac{1}{8p^3\pi^3}(-4p\pi, 0) = (\frac{-1}{2p^2\pi^2}, 0), \quad f''(2p\pi) = \frac{1}{8p^3\pi^3}(6, 2p\pi),$$

$$\|f'(2p\pi)\|^3 = \frac{1}{8p^6\pi^2}, \quad \det(f'(2p\pi), f''(2p\pi)) = \frac{1}{8p^3\pi^3}\frac{1}{2p^2\pi^2}\det\begin{pmatrix}-1 & 6\\ 0 & 2p\pi\end{pmatrix} = \frac{1}{8p^4\pi^4}.$$

Et finalement

$$R(2p\pi) = \frac{-1}{p^2\pi^2}.$$

La tangente étant horizontale et de même sens que $-e_1$, le vecteur normal $\mathbf{n}$ est $-e_2$. Le centre de courbure en $f(t_p)$ est donc

$$C(t_p) = f(t_p) + R(t_p)\mathbf{n} = (\frac{1}{2p\pi}, 0) + (0, \frac{1}{p^2\pi^2}) = (\frac{1}{2p\pi}, \frac{1}{p^2\pi^2}).$$

Quel que soit $p \in \mathbb{Z}_+^*$, $C(t_p)$ est situé sur la parabole d'équation $y = 4x^2$.

7. On peut représenter le support $\mathscr{S}$ de γ.