

MATH502 - Contrôle terminal du 20 décembre 2017

- (2pts) **Questions de cours 1.** Soit Γ un arc géométrique orienté de \mathbb{R}^2 , immergé et de classe C^2 .
- Donner la définition de la courbure algébrique ρ de Γ .
 - Donner la formule calculant ρ en fonction d'une paramétrisation (I, f) de Γ et montrer à l'aide de cette formule que ρ ne dépend pas de la paramétrisation choisie de Γ .
- (2pts) **Questions de cours 2.** Soient $n, k \geq 1$ et U un ouvert de \mathbb{R}^n .
- Donner la définition d'un champ de vecteurs \vec{u} de classe C^k sur U . Donner la définition d'une forme différentielle φ de degré 1 et de classe C^k sur U .
 - Expliciter la correspondance entre forme différentielle de degré 1 sur U et champ de vecteurs sur U .
- (2pts) **Questions de cours 3.** Énoncer le Lemme de Poincaré et la formule de Green-Riemann.

Exercice 1. Soit $\gamma = ([-1, 1], f)$, où $f(t) = (t^2, t^3)$, un arc paramétré de \mathbb{R}^2 . On note \mathcal{S} son support. On oriente \mathbb{R}^2 par la base canonique et on oriente l'arc géométrique Γ par la paramétrisation γ . Le produit scalaire considéré sur \mathbb{R}^2 est le produit scalaire standard, qui fait de la base canonique une base orthonormée.

- (2pts) 1. Montrer que $f :]-1, 1[\rightarrow \mathcal{S}$ est une bijection C^∞ . L'arc γ admet-il des points multiples ?
- (1pt) 2. La paramétrisation γ est-elle une paramétrisation régulière ?
- (2pts) 3. Si γ possède des points singuliers, représenter l'allure de \mathcal{S} au voisinage de ces points.
- (3pts) 4. Montrer que $g :]\frac{1}{2}, 1[\rightarrow \mathcal{S}$ défini par $g = f|_{] \frac{1}{2}, 1[}$ est un plongement.
- (1pt) 5. Indiquer par une flèche sur l'allure de \mathcal{S} le sens de parcours de \mathcal{S} donné par γ . Représenter, en un point régulier m , le repère de Frenet $(m, \mathbf{t}, \mathbf{n})$ de γ .
- (2pts) 6. Sans calcul, mais en justifiant géométriquement sa position, représenter le centre de courbure C_m de γ en un point régulier $m \in \mathcal{S}$.
- (2pts) 7. Calculer la longueur ℓ de γ .

Exercice 2. Soit γ l'arc paramétré de l'Exercice 1 et \mathcal{A} l'aire du sous-ensemble compact K de \mathbb{R}^2 dont la frontière est constituée du support \mathcal{S} de γ et du segment $\mathcal{I} = [(1, -1), (1, 1)]$.

- (2pts) 1. À l'aide du théorème de Fubini, calculer l'aire \mathcal{A} .
- (2pts) 2. Calculer \mathcal{A} à l'aide de la formule de Green-Riemann.

Exercice 3. On note φ la forme différentielle de degré 1, définie sur $U = \mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(x, y) = (x^2 - y^2)dx - 2xydy,$$

et ψ la forme différentielle de degré 1, définie sur $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ par

$$\psi(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}dx - \frac{x}{x^2 + y^2}dy.$$

- (1pt) 1. La forme différentielle de degré 1 φ est-elle fermée ?
- (1pt) 2. La forme différentielle de degré 1 φ admet-elle une primitive sur U ? Si oui, donner une telle primitive.
- (1pt) 3. Soit $\gamma = ([0, 1], f)$, où $f(t) = (\cos t^3, \log \sin(t^2 + 1))$. Calculer $\int_{\gamma} \varphi$.
- (1pt) 4. La forme différentielle de degré 1 ψ est-elle fermée sur V ?
- (2pts) 5. Soit $\alpha = ([0, 2\pi], g)$, où $g(t) = (\cos t, \sin t)$. Calculer $\int_{\alpha} \psi$. La forme différentielle de degré 1 ψ admet-elle une primitive sur V ?
-

Exercice 1.

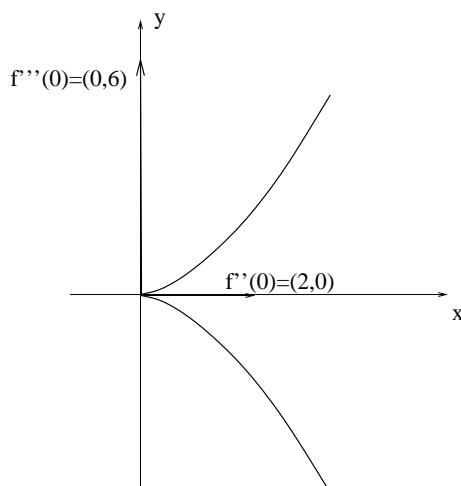
Question 1. Il suffit de remarquer que $f_2 : t \mapsto t^3$ est elle-même une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} (il s'agit d'une application strictement croissante). Il s'ensuit que $f(t) = f(t')$ impliquant $f_2(t) = f_2(t')$, nécessairement $t = t'$, et donc f est injective. En particulier, $f :]-1, 1[\rightarrow f[]-1, 1[= \mathcal{S}$ est surjective et injective, donc est une bijection. D'autre part f est de classe C^∞ , car ses deux composantes le sont.

Comme f est injective, γ n'admet pas, par définition, de point multiple.

Question 2. Notons $f = (f_1, f_2)$. On a $f_1'(t) = f_2'(t) = 0 \iff 2t = 3t^2 = 0$, équation qui admet une unique solution en $t = 0$. Donc, puisque la question précédente γ n'admet pas de points multiples, γ n'admet qu'un seul point singulier.

Question 3. On a $f''(t) = (2, 6t)$, soit $f''(0) = (2, 0)$, puis $f'''(t) = (0, 6)$. Alors $f'''(0) = (0, 6)$ est la première dérivée en 0 non colinéaire à $f''(0)$ (le fait que $f''(0) \perp f'''(0)$ est un accident). On en déduit que γ possède en $t = 0$ un point de rebroussement de première espèce.

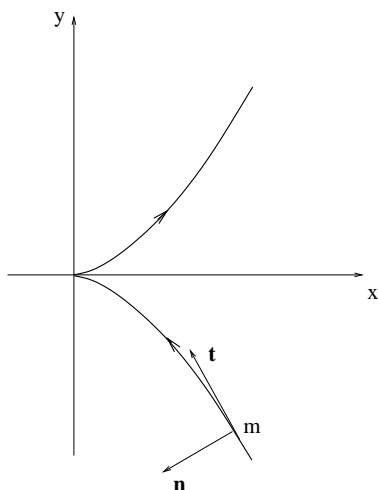
On représente les vecteurs $f''(0)$ et $f'''(0)$ dans \mathbb{R}^2 . On connaît alors l'allure locale de \mathcal{S} au voisinage de m_0 , du fait de la parité et de l'imparité des ordres (2 et 3) des deux premières dérivées en 0 linéairement indépendantes.



Question 4. D'après la question 1, $g :]1/2, 1[\rightarrow \mathcal{S}$ est une bijection C^∞ , donc continue et une immersion. Pour répondre à la question, il suffit par conséquent de démontrer que $g^{-1} : \mathcal{S} \rightarrow]-1, 1[$ est continue.

Soit $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $g([1/2, 1])$ de limite $m = (x, y) = g(c)$. En particulier, on a $y = c^3$, ce qui équivaut à $c = y^{1/3}$. Montrons alors que $g^{-1}(m_n) = t_n$ converge vers c . En notant $m_n = (x_n, y_n)$, on a $m_n = g(g^{-1}(m_n))$ et donc $y_n = g_2(g^{-1}(m_n)) = g_2(t_n) = t_n^3$. Du fait que y_n tend vers y et que $t_n = g_2^{-1}(y_n) = y_n^{1/3}$, par continuité de g_2^{-1} en y , on a nécessairement $t_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} y^{1/3} = c$.

Question 5.



Désignons par $(m, \mathbf{t}, \mathbf{n})$ le repère de Frenet de γ en un point régulier $m = f(c)$. Par définition \mathbf{t} est le vecteur unitaire tangent de γ , dont le sens est donné par l'orientation de γ , c'est-à-dire que \mathbf{t} est colinéaire à $f'(c)$ et de même sens que $f'(c)$. Dans la tangente $T_m(\gamma)$ en m à γ , la direction de $f'(c)$ est donnée par le « sens de parcours de \mathcal{S} suivant les paramètres croissants ». Ceci permet de placer \mathbf{t} sur l'allure de \mathcal{S} donnée à la question 3.

Pour placer \mathbf{n} , on choisit l'unique vecteur unitaire de \mathbb{R}^2 orthogonal à \mathbf{t} , tel que (\mathbf{t}, \mathbf{n}) est dans la même orientation que l'orientation choisie, c'est-à-dire ici celle de la base canonique.

Question 6. Le centre de courbure C_m de γ en m est par définition donné par $C_m = m + g''(s)$, si g est une paramétrisation normale de Γ , telle que $g(s) = m$. Ainsi C_m est situé sur la normale à $T_m(\gamma)$. Plaçons-nous en un point m où la courbure n'est pas nulle. Alors comme $g'(s)$ et $g''(s)$ sont linéairement indépendants, le point m est d'allure ordinaire, et la concavité de \mathcal{S} étant dans le demi-plan délimité par $T_m(\gamma)$ et contenant $g''(s)$, ce demi-plan contient aussi C_m . Ainsi C_m est dans le demi-plan de concavité de γ en m .

Question 7. La longueur ℓ de γ est deux fois la longueur de $\gamma|_{[0,1]}$, par symétrie orthogonale de γ par rapport à Ox . On a donc

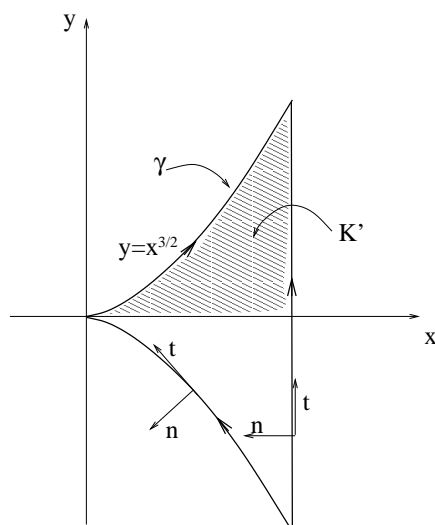
$$\ell = 2 \int_{t \in [0,1]} \sqrt{4t^2 + 9t^4} dt = 2 \int_{t \in [0,1]} t \sqrt{4 + 9t^2} dt.$$

Comme $\frac{2}{3} \frac{1}{9} \frac{1}{2} (4 + 9t^2)^{\frac{3}{2}}$ a pour dérivée $t \sqrt{4 + 9t^2}$, on a obtenu

$$\ell = \frac{2}{27} \left[(4 + 9t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{27} (13^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}).$$

Exercice 2

Question 1. L'aire \mathcal{A} est le double de l'aire du compact K' de \mathbb{R}^2 dont la frontière est le support de l'arc $k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $k(t) = (t^2, t^3)$ et le segment $[(1, 0), (1, 1)]$.



En effet $K = K' \cup \sigma(K')$, où σ est la symétrie orthogonale d'axe Ox et $K' \cap \sigma(K')$ est le segment $[(0, 0), (1, 0)]$, qui est négligeable pour la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^2 . On a donc, puisque l'isométrie σ préserve μ_2 ,

$$\mu_2(K) = \mu_2(K') + \mu_2(\sigma(K')) - \mu_2(K' \cap \sigma(K')) = \mu_2(K') + \mu_2(\sigma(K')) = 2\mu_2(K').$$

Notons que le support \mathcal{S}' de k est le graphe de l'application $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $p(t) = t^{\frac{3}{2}}$. D'après le théorème de Fubini, il s'ensuit que

$$\mu_2(K') = \int_{K'} 1 d\mu_2 = \int_{x \in [0, 1]} \int_{y \in [0, x^{\frac{3}{2}}]} 1 dy dx = \int_{x \in [0, 1]} x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} \left[x^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{5}.$$

Ainsi $\mathcal{A} = \frac{4}{5}$.

Question 2. Pour calculer \mathcal{A} , on peut utiliser la formule de Green-Riemann, puisque K est un compact à bord. Donnons une paramétrisation de ∂K . $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathcal{S}$ paramètre \mathcal{S} , et $\alpha : [-1, 1] \rightarrow \mathcal{S}$ où $\alpha(t) = (1, t)$, paramètre \mathcal{S} . Afin que la paramétrisation de ∂K soit compatible avec l'orientation de ∂K_+ par la normale rentrante, l'orientation de \mathbb{R}^2 étant celle de la base canonique, il convient de renverser l'orientation de γ , en considérant $\gamma_+(t) = \gamma(-t) = (t^2, -t^3)$. On a alors par la formule de Green-Riemann

$$\mathcal{A} = \int_{\gamma_+} x dy + \int_{\alpha} x dy,$$

$$\mathcal{A} = \int_{t \in [-1, 1]} t^2(-3t^2) dt + \int_{t \in [-1, 1]} 1 \cdot 1 dt = -3 \left[\frac{t^5}{5} \right]_{-1}^1 + 2 = \frac{-6}{5} + 2 = \frac{4}{5}.$$

Exercice 3

Question 1. Un calcul direct montre que

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) = -2y = \frac{\partial}{\partial y}(-2xy).$$

La forme φ est donc fermée.

Question 2. Comme U est étoilé et que φ est fermée, φ admet une primitive sur U , d'après le lemme de Poincaré. Notons $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ une telle primitive. On a

$$\frac{\partial g}{\partial x} = x^2 - y^2 \iff g(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy^2 + C(y)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -2xy \iff -2xy + C'(y) = -2xy \iff C'(y) = 0 \iff C(y) = C \in \mathbb{R}.$$

On en conclut que $g(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy^2$ est une primitive de g sur U (On choisit $C = 0$, une primitive de φ étant définie à une constante près).

Question 3. On a $f(0) = (1, \log \sin 1)$ et $f(1) = (\cos 1, \log \sin 2)$. Puisque φ admet g pour primitive sur U ,

$$\int_{\gamma} \varphi = g(f(1)) - g(f(0)) = \frac{\cos^3 1}{3} - \cos 1 \log^2 \sin 2 - \frac{1}{3} + \log^2 \sin 1.$$

Question 4. Un calcul direct montre que ψ est fermée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

Question 5. Comme V n'est pas étoilée, on ne peut pas appliquer le lemme de Poincaré pour déduire de la fermeture de ψ que ψ est exacte. Calculons $\int_{\alpha} \psi$. On a

$$\int_{\alpha} \psi = \int_0^{2\pi} -\sin t(-\sin t) + \cos t(\cos t) dt = 2\pi.$$

Si ψ était exacte sur V , on aurait $\int_{\alpha} \psi = 0$ car α est fermé. Il s'ensuit que ψ n'admet pas de primitive sur V . Notons qu'une recherche de primitive de φ sur un ouvert W impose d'exclure de W au moins une demi-droite du type $\mathbb{R}_- \times \{0\}$.
