MATH502 - Contrôle terminal du 27 février 2018

Aucun document, aucun appareil électronique autorisé. Les points en marge sont donnés à titre de comparaison d'une question à l'autre. Les notes seront ramenées à 20.

(2pts) **Questions de cours 1.** Donner la définition d'un arc géométrique orienté Γ de $\mathbb{R}^n$.

(2pts) **Questions de cours 2.** Soient $n, k \geq 1$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

— Donner la définition d'un champ de vecteurs $\vec{u}$ de classe C^k sur U. Donner la définition d'une forme différentielle φ de degré 1 et de classe C^k sur U.
— Expliciter la correspondance entre forme différentielle de degré 1 sur U et champ de vecteurs sur U.

(2pts) **Questions de cours 3.** Énoncer le Lemme de Poincaré et la formule de Green-Riemann.

Exercice 1. Soit $\gamma = (\mathbb{R}, f)$, où $f(t) = (t^2, t^4+t^5)$, un arc paramétré de $\mathbb{R}^2$. On note $\mathscr{S}$ son support. On oriente $\mathbb{R}^2$ par la base canonique et on oriente l'arc géométrique Γ par la paramétrisation γ. Le produit scalaire considéré sur $\mathbb{R}^2$ est le produit scalaire standard, qui fait de la base canonique une base orthonormée.

(2pts) **1.** Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathscr{S}$ est une bijection C^∞.

(2pts) **2.** Si γ possède des points singuliers, représenter l'allure de $\mathscr{S}$ au voisinage de ces points.

(3pts) **3.** Montrer que $g :]0, +\infty[\to \mathscr{S}$ défini par $g = f_{\restriction]0,+\infty[}$ est un plongement.

(3pts) **4.** Représenter $\mathscr{S}$ après avoir fait l'étude de γ :
— tableau des variations des composantes de f,
— tangentes horizontales ou verticales éventuelles,
— étude des branches asymptotiques éventuelles.

(1pt) **5.** Indiquer par une flèche sur l'allure de $\mathscr{S}$ le sens de parcours de $\mathscr{S}$ donné par γ. Représenter, en un point régulier m, le repère de Frenet $(m, \mathbf{t}, \mathbf{n})$ de γ.

(2pts) **6.** Sans calcul, mais en justifiant géométriquement sa position, représenter le centre de courbure C_m de γ en un point régulier $m \in \mathscr{S}$.

(2pts) **7.** Montrer que la courbure de γ en m tend vers 0 lorsque $\|m\| \to +\infty$

Exercice 2. Soit γ l'arc paramétré de l'Exercice 1 et $\mathscr{A}$ l'aire du sous-ensemble compact K de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière est constituée du support $\mathscr{S}$ de γ et du segment $\mathscr{I} = [(1,0),(1,2)]$ de $\mathbb{R}^2$.

(2pts) **1.** Pour $x \in [0,1]$, déterminer l'ensemble $\mathscr{I}_x := K \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \in \mathbb{R}\}$, et calculer sa longueur.

(2pts) **2.** À l'aide du théorème de Fubini, calculer l'aire $\mathscr{A}$.

(2pts) **3.** Calculer $\mathscr{A}$ à l'aide de la formule de Green-Riemann.

Exercice 3. On note φ la forme différentielle de degré 1, définie sur $U = \mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(x,y) = (-y \sin xy)\mathrm{d}x - (x \sin xy)\mathrm{d}y,$$

et ψ la forme différentielle de degré 1, définie sur $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$\psi(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y.$$

(1pt) **1.** La forme différentielle de degré 1 φ est-elle fermée sur U ?

(2pts) **2.** Dire sans calcul si la forme différentielle de degré 1 φ admet une primitive sur U ? Si oui, donner une telle primitive.

(2pts) **3.** Soit $\gamma = ([0,1], f)$ un arc paramétré de $\mathbb{R}^2$, où $f(t) = (\cos t + \sin(\log(t+1)), t + \sin t)$. Calculer $\int_\gamma \varphi$.

(1pt) **4.** La forme différentielle de degré 1 ψ est-elle fermée sur V ?

(2pts) **5.** Rechercher une primitive de ψ sur V. La forme différentielle de degré 1 ψ est-elle exacte sur V ?

Corrigé du contrôle de MATH502 - 27 décembre 2018

Exercice 1

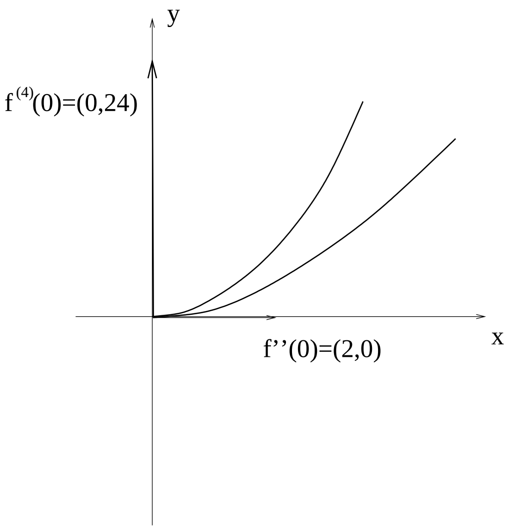
Question 1. Cherchons les points multiples de $f = (f_1, f_2)$. Soient $s, t \in \mathbb{R}$, tels que $f(t) = f(s)$. Alors, cette égalité appliquée à f_1 donne $s^2 = t^2 \iff s^2 - t^2 = (s-t)(s+t) = 0 \iff s = -t$ ou $s = t$. Mais $f_2(t) = f_2(-t)$ donne $t^4 + t^5 = t^4 - t^5$, soit $t = s = 0$. En conclusion, l'arc γ est simple.

Question 2. On a $f_1'(t) = f_2'(t) = 0 \iff 2t = 4t^3 + 5t^4 = 0$, équation qui admet une unique solution en $t = 0$. Donc, puisque d'après la question précédente γ n'admet pas de points multiples, γ n'admet qu'un seul point singulier qui est $f(0) = (0, 0)$.

On a $f''(t) = (2, 12t^2 + 20t^3)$, soit $f''(0) = (2, 0)$, $f'''(t) = (0, 24t + 60t^2)$, soit $f'''(0) = (0, 0)$, $f^{(4)}(t) = (0, 24 + 120t)$, soit $f^{(4)}(0) = (0, 24)$.

Alors $f^{(4)}(0) = (0, 24)$ est la première dérivée en 0 non colinéaire à $f''(0)$ (le fait que $f'(0) \perp f'''(0)$ est un accident). Ainsi γ possède en $t = 0$ un point de rebroussement de seconde espèce et sa tangente est dirigée par le vecteur $f''(0) = (2, 0)$, qui est horizontal.

On représente les vecteurs $f''(0)$ et $f^{(4)}(0)$ dans $\mathbb{R}^2$. On connait alors l'allure locale de $\mathscr{S}$ au voisinage de $(0, 0)$, du fait de la parité des ordres (2 et 4) des deux premières dérivées en 0 linéairement indépendantes.



Question 3. D'après la question 1, $g :]0, +\infty[\to \mathscr{S}$ est une bijection C^∞, donc continue et une immersion. Pour répondre à la question, il suffit par conséquent de démontrer que $g^{-1} : \mathscr{S} \to]0, +\infty[$ est continue.

Soient $m = (x, y) = g(c) \in \mathscr{S}$, pour $c \in]0, +\infty[$ et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $g(]0, +\infty[)$ de limite m. Notons $t_n = g^{-1}(m_n)$, on va montrer que t_n tend vers $g^{-1}(m) = c$.

On a $x = c^2$ et $c > 0$, donc $c = \sqrt{x}$.

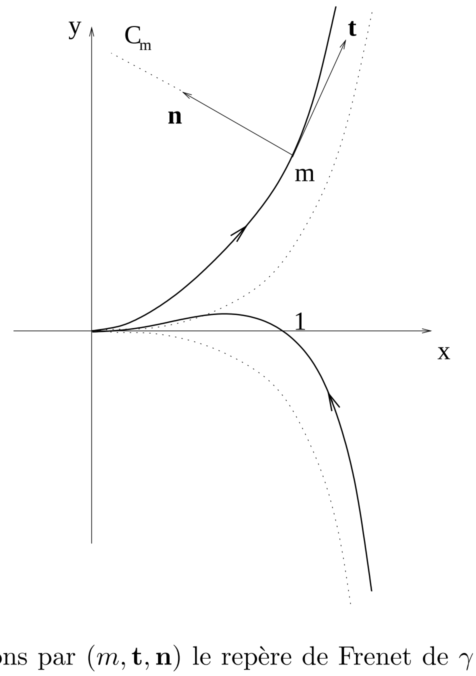
De même, en notant $m_n = (x_n, y_n)$, on a $x_n = t_n^2$, donc $t_n = \sqrt{x_n}$. Et comme $u \mapsto \sqrt{u}$ est continue en x et que x_n tend vers x, t_n tend vers $\sqrt{x} = c$.

Question 4. La fonction f_1 est décroissante sur $\mathbb{R}_-$, croissante sur $\mathbb{R}_+$ et f_1' ne s'annule qu'en $t = 0$. On a $f_2'(t) = 4t^3 + 5t^4 = t^3(4 + 5t)$, donc f_2 est croissante sur $] - \infty, -\frac{4}{5}]$, croissante sur $[-\frac{4}{5}, 0]$ et décroissante sur $[0, +\infty[$. En dehors du point singulier $(0, 0)$, γ possède une tangente horizontale en $t = -\frac{4}{5}$. D'où le tableau de variations suivant

t	$-\infty$		$-\frac{4}{5}$		0		$+\infty$
$f_1'(t)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f_2'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_1(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{16}{25}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f_2(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$(\frac{4}{5})^4 + (\frac{4}{5})^5$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

L'arc γ possède une branche infinie en $-\infty$ et une autre en $+\infty$. Comme $\lim_{t\to\pm\infty} \frac{f_2(t)}{f_1(t)} = +\infty$, γ possède une direction asymptotique verticale en $\pm\infty$. Et comme $\lim_{x\to\pm\infty} f_1(t) = +\infty$, il s'agit d'une branche parabolique. Enfin, pour $t > 0$, on a $t = \sqrt{f_1(t)}$, donc $f_2 = f_1^2 + f_1^{\frac{5}{2}} \sim_{t\to+\infty} f_1^5$. De même, pour $t < 0$, $f_2 = f_1^2 - f_1^{\frac{5}{2}} \sim_{t\to-\infty} -f_1^{\frac{5}{2}}$, et la courbe $x \mapsto \pm x^{\frac{5}{2}}$ est asymptote de γ en $\pm\infty$.

On déduit de cette étude l'allure suivante de $\mathscr{S}$.



Question 5. Désignons par $(m, \mathbf{t}, \mathbf{n})$ le repère de Frenet de γ en un point régulier $m = f(c)$. Par définition $\mathbf{t}$ est le vecteur unitaire tangent de γ, dont le sens est donné par l'orientation de γ, c'est-à-dire que $\mathbf{t}$ est colinéaire à $f'(c)$ et de même sens que $f'(c)$. Dans la tangente $T_m(\gamma)$ en m à γ, la direction de $f'(c)$ est donnée par le ≪ sens de parcours de $\mathscr{S}$ suivant les paramètres croissants ≫. Ceci permet de placer $\mathbf{t}$ sur l'allure de $\mathscr{S}$ donnée à la question 4.

Pour placer $\mathbf{n}$, on choisit l'unique vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$ orthogonal à $\mathbf{t}$, tel que $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$ est dans la même orientation que l'orientation choisie, c'est-à-dire ici celle de la base canonique.

Question 6. Le centre de courbure C_m de γ en m est par définition donné par $C_m = m + g''(s)$, si g est une paramétrisation normale de Γ, telle que $g(s) = m$. Ainsi C_m est situé sur la normale à $T_m(\gamma)$, puisque $g''(s) \perp g'(s) = \mathbf{t}$. Plaçons-nous en un point m où la courbure n'est pas nulle.

Alors comme $g'(s)$ et $g''(s)$ sont linéairement indépendants, le point m est d'allure ordinaire, et la concavité de $\mathscr{S}$ étant dans le demi-plan délimité par $T_m(\gamma)$ et contenant $g''(s)$, ce demi-plan contient aussi C_m Ainsi C_m est dans le demi-plan de concavité de γ en m.

Question 7. La courbure de γ est donnée par

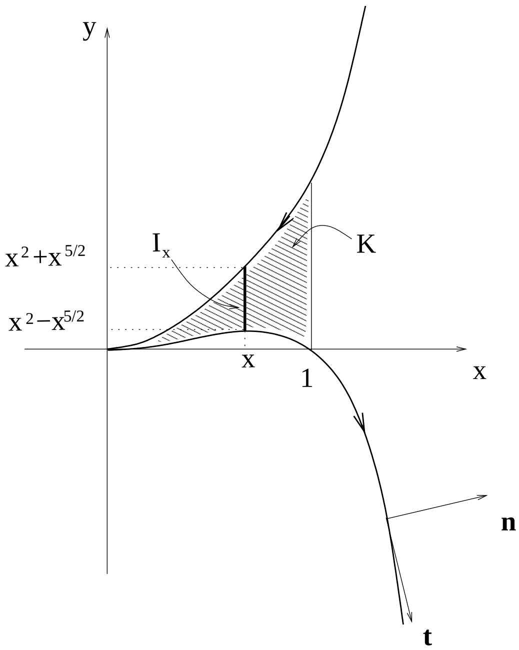
$$\rho = \frac{f_1' f_2'' - f_1'' f_2'}{(f_1'^2 + f_2'^2)^{3/2}}.$$

Le calcul montre que

$$\rho = \frac{t}{|t|} \frac{16 + 30t}{(4 + t^4(4+5t)^2)^{\frac{3}{2}}} \to_{t \to \pm\infty} 0.$$

Exercice 2

Question 1. Si $x \in [0,1]$, la droite $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \in \mathbb{R}\}$ rencontre $\mathscr{S}$ en $f(t) = (x,y)$ tel que $t^2 = x$ et $y = t^4 + t^5$. Ce qui donne, $t = \pm\sqrt{x}$ et donc $y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}}$. On en conclut que $\mathscr{I}_x$ est le segment de $\mathbb{R}^2$ d'extrémités $(x, x^2 - x^{\frac{5}{2}})$ et $(x, x^2 + x^{\frac{5}{2}})$. La longueur de $\mathscr{I}_x$ est donc $\ell_x = x^2 + x^{\frac{5}{2}} - (x^2 - x^{\frac{5}{2}}) = 2x^{\frac{5}{2}}$.



Question 2. D'après le théorème de Fubini, il s'ensuit que

$$\mathscr{A} = \mu_2(K) = \int_K 1 \mathrm{d}\mu_2 = \int_{x\in[0,1]} \ell_x \; \mathrm{d}x = \int_{x\in[0,1]} 2x^{\frac{5}{2}} \; \mathrm{d}x = \frac{4}{7}\left[x^{\frac{7}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{7}.$$

Question 3. Pour calculer $\mathscr{A}$, on peut utiliser la formule de Green-Riemann, puisque K est un compact à bord. Donnons une paramétrisation de ∂K. $\gamma : [-1,1] \to \mathscr{S}$ paramètre la partie du bord de K qui est dans $\mathscr{S}$, et $\alpha : [0,2] \to \mathscr{I}$ où $\alpha(t) = (1,t)$, paramètre $\mathscr{I}$. Afin que la paramétrisation de ∂K soit compatible avec l'orientation de ∂K_+ par la normale rentrante, l'orientation de $\mathbb{R}^2$ étant celle de la base canonique, il convient de renverser l'orientation de γ, en considérant γ_+ paramétré par $f_+(t) = f(-t) = (t^2, t^4 - t^5)$. On a alors par la formule de Green-Riemann

$$\mathscr{A} = \int_{\gamma_+} x \; \mathrm{d}y + \int_\alpha x \; \mathrm{d}y,$$

$$\mathscr{A} = \int_{t\in[-1,1]} t^2(4t^3 - 5t^4)\ \mathrm{d}t + \int_{t\in[-1,1]} 1\cdot 1\ \mathrm{d}t = \left[4\frac{t^6}{6} - 5\frac{t^7}{7}\right]_{-1}^{1} + 2 = \frac{-10}{7} + 2 = \frac{4}{7}.$$

Exercice 3

Question 1. Un calcul direct montre que

$$\frac{\partial}{\partial y}(-y\sin xy) = -\sin y - xy\cos xy = \frac{\partial}{\partial x}(-x\sin xy).$$

La forme φ est donc fermée.

Question 2. Comme U est étoilé et que φ est fermée, φ admet une primitive sur U, d'après le lemme de Poincaré. Notons $g : U \to \mathbb{R}$ une telle primitive. Il existe alors une fonction dérivable $y \mapsto C(y)$ telle que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -y\sin xy \iff g(x,y) = \cos xy + C(y)$$

et donc

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -x\sin xy \iff \frac{\partial g}{\partial y}(\cos xy + C(y)) = -x\sin xy + C'(y) = -x\sin xy$$
$$\iff C'(y) = 0 \iff C(y) = C \in \mathbb{R}.$$

On en conclut que $g(x,y) = \cos xy$ est une primitive de g sur U (On choisit $C = 0$, une primitive de φ étant définie à une constante près).

Question 3. On a $f(0) = (1,0)$ et $f(1) = (\cos 1 + \sin\log 2, 1 + \sin 1)$. Puisque φ admet g pour primitive sur U,

$$\int_\gamma \varphi = g(f(1)) - g(f(0)) = \cos((\sin\log 2 + \cos 1)(1 + \sin 1)) - 1.$$

Question 4. Un calcul direct montre que ψ est fermée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Question 5. Comme V n'est pas étoilé, on ne peut pas appliquer le lemme de Poincaré pour déduire de la fermeture de ψ que ψ est exacte.

Si $g : V \to \mathbb{R}$ est une primitive de ψ sur V, on a pour tout $(x,y) \in V$ l'existence d'une fonction dérivable $y \mapsto C(y)$ telle que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \iff g(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + C(y)$$

et donc

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} \iff \frac{\partial g}{\partial y}(\frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + C(y)) = \frac{y}{x^2+y^2} + C'(y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$
$$\iff C'(y) = 0 \iff C(y) = C \in \mathbb{R}.$$

On en conclut que $g(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ est une primitive de g sur V (On choisit $C = 0$, une primitive de φ étant définie à une constante près). Par définition la forme différentielle de degré 1 ψ est exacte sur V.