MATH502 - Devoir 1

On considère l'arc paramétré $\gamma = (\mathbb{R}^*, f)$ de $\mathbb{R}^2$ où $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^2$ est l'application définie par

$$f(t) = (\frac{t - \sin t}{t^2}, \frac{1 - \cos t}{t^2}).$$

On note $\mathscr{S}$ le support de γ.

1. Pourquoi suffit-il d'étudier cet arc sur $]0, +\infty[$ en vue de tracer $\mathscr{S}$? L'arc γ admet-il des branches infinies ?

2. Donner le tableau de variations des deux composantes de f. Indiquer les paramètres t en lesquels γ possède des tangentes horizontales.

(Indication. Pour déterminer le signe des dérivées des composantes de f', on aura intérêt à simplifier leur expression à l'aide des formules $1 + \cos t = 2\cos^2 \frac{t}{2}$, $1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}$ et $\sin t = 2\cos \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2}$. On pourra ensuite étudier une fonction auxiliaire).

3. Donner les points singuliers de γ et étudier l'allure de $\mathscr{S}$ au voisinage de ces points.

4. Donner l'équation de la tangente en ces points. Montrer que ces tangentes passent toutes par un même point $(0, \dfrac{1}{2})$ de l'axe Oy.

5. Montrer que les points singuliers de γ sont tous situés sur un même cercle dont on donnera le centre et le rayon.

6. Donner la courbure de γ en chacun des points de tangente horizontale, ainsi que le centre de courbure.

7. Représenter $\mathscr{S}$.