MATH502 - Contrôle continu du 14 novembre 2017

(2pts) **Questions de cours 1.** Soit $n, k \geq 1$. Donner la définition d'un arc géométrique Γ de $\mathbb{R}^n$ de classe C^k et de son support. Expliquer en quoi le support ne dépend pas de la paramétrisation choisie de Γ.

(2pts) **Questions de cours 2.** Montrer que si Γ est un arc géométrique de $\mathbb{R}^n$ de classe C^k, $k \geq 1$, et si $\gamma = (I, f) \in \Gamma$ est un arc paramétré immergé, il en est de même de toute autre arc paramétré de Γ

(4pts) **Questions de cours 3.** Donner la définition d'un arc rectifiable de $\mathbb{R}^n$ et montrer que tout arc paramétré C^k de $\mathbb{R}^n$ est rectifiable lorsque $k \geq 1$.

Exercice 1. Soit $\gamma = (]-1, 1[, f)$, où $f(t) = (t + t^6, t^3)$, un arc paramétré de $\mathbb{R}^2$. On note $\mathscr{S}$ son support. On oriente $\mathbb{R}^2$ par la base canonique et on oriente l'arc géométrique Γ par la paramétrisation γ. Le produit scalaire considéré sur $\mathbb{R}^2$ est le produit scalaire standard, qui fait de la base canonique une base orthonormée.

(2pts) **1.** Montrer que $f :]-1, 1[\to \mathscr{S}$ est une bijection C^∞. L'arc γ admet-il des points multiples ?

(2pts) **2.** Montrer que γ est une paramétrisation régulière.

(6pts) **3.** Déduire des deux questions précédentes que $f :]-1, 1[\to \mathscr{S}$ est un plongement.

(2pts) **4.** Donner la direction de la tangente à γ en $m_0 = (0, 0)$, puis l'allure de $\mathscr{S}$ au voisinage de m_0.

(2pts) **5.** Trouver les points de $\mathscr{S}$ en lesquels la courbure algébrique de γ est nulle.

(2pts) **6.** Sans calcul, mais en justifiant sa configuration relativement à $\mathscr{S}$, représenter le repère de Frenet de γ en un point $m \in \mathscr{S}$, dans un voisinage de m_0.

(4pts) **7.** Sans calcul, mais en justifiant sa position, représenter le centre de courbure C_m de γ en un point $m \in \mathscr{S}$ voisin de m_0.

Question facultative. Toujours sans calcul mais en justifiant, représenter approximativement l'ensemble du plan parcouru par les points C_m, lorsque m parcourt un voisinage de m_0 dans $\mathscr{S}$.

Corrigé

Question 1. Il suffit de remarquer que $f_2 : t \mapsto t^3$ est elle-même une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (il s'agit d'une application strictement croissante). Il s'ensuit que $f(t) = f(t')$ impliquant $f_2(t) = f_2(t')$, nécessairement $t = t'$, et donc f est injective. En particulier, $f :]-1,1[\to f(]-1,1[) = \mathscr{S}$ est surjective et injective, donc est une bijection. D'autre part f est de classe C^∞, car ses deux composantes le sont.

Comme f est injective, γ n'admet pas, par définition, de point multiple.

Question 2. Notons $f = (f_1, f_2)$. On a $f_1'(t) = f_2'(t) = 0 \iff 1 + 6t^5 = 3t^2 = 0$, équation qui n'admet aucune solution en t. Donc, puisque la question précédente γ n'admet pas de points multiples, aucun point de γ n'est singulier.

Question 3. D'après la question 1, $f :]-1,1[\to \mathscr{S}$ est une bijection C^∞, donc continue et une immersion. Pour répondre à la question, il suffit par conséquent de démontrer que $f^{-1} : \mathscr{S} \to]-1,1[$ est continue.

Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{S}$ de limite $m = (x, y) = f(c) \in \mathscr{S}$. En particulier, on a $y = c^3$, ce qui équivaut à $c = y^{\frac{1}{3}}$. Montrons alors que $t_n = f^{-1}(m_n)$ converge vers c. En notant $m_n = (x_n, y_n)$, on a $m_n = f(f^{-1}(m_n))$ et donc $y_n = f_2(f^{-1}(m_n)) = f_2(t_n) = t_n^3$. Du fait que y_n tend vers y et que $t_n = f_2^{-1}(y_n) = y_n^{\frac{1}{3}}$, par continuité de f_2^{-1} en y, on a nécessairement $t_n \to_{n\to\infty} y^{\frac{1}{3}} = c$.

Question 4. On a $f'(t) = (1 + 6t^5, 3t^2)$. Puisque $f'(0) = (1, 0) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$, le vecteur $(1, 0)$ dirige la tangente à γ en m_0. On a ensuite $f''(t) = (30t^4, 6t)$, soit $f''(0) = 0_{\mathbb{R}^2}$, puis $f'''(t) = (120t^3, 6)$. Alors $f'''(0) = (0, 6)$ est la première dérivée en 0 non colinéaire à $f'(0)$ (le fait que $f'(0) \perp f'''(0)$ est un accident). D'après la Section **??**, γ possède en m_0 un point d'inflexion.

On représente les vecteurs $f'(0)$ et $f'''(0)$ dans $\mathbb{R}^2$. On connait alors l'allure locale de $\mathscr{S}$ au voisinage de m_0, du fait de l'imparité des ordres (1 et 3) des deux premières dérivées en 0 linéairement indépendantes.

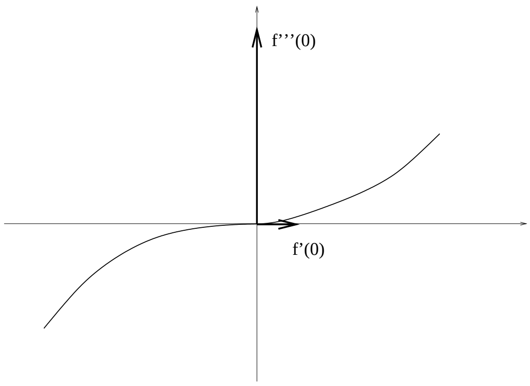


fig.examen

Question 5. La courbure algébrique de γ en m_0 est donnée par

$$\rho(c) = \det(f'(c), f''(c))/\|f'(c)\|^3,$$

où le déterminant de ces deux vecteurs est celui de la matrice de leurs coordonnées exprimées dans une base quelconque, mais orthonormée (pour le produit scalaire choisi) et orientée (la base canonique convient, par exemple). D'après la question précédente, on a alors

$$\det(f'(c), f''(c)) = 6c + 36c^6 - 90c^6 = 6c(1 - 9c^5) = 0 \Longleftrightarrow c = 0 \quad \text{ou} \quad c = 1/9^{\frac{1}{5}}.$$

On en conclut que Γ possède deux points points de courbure nulle.

Question 6. Désignons par $(m, \mathbf{t}, \mathbf{n})$ le repère de Frenet de γ en $m = f(c)$, au voisinage de m_0. Par définition $\mathbf{t}$ est le vecteur unitaire tangent de γ, dont le sens est donné par l'orientation de γ, c'est-à-dire que $\mathbf{t}$ est colinéaire à $f'(c)$ et de même sens que $f'(c)$. Dans la tangente $T_m(\gamma)$ en m à γ, la direction de $f'(c)$ est donnée par le « sens de parcours de $\mathscr{S}$ suivant les paramètres croissants ». Mais Réciproquement, ce sens de parcours de $\mathscr{S}$ est indiqué par $f'(0) = (0, 1)$: de « gauche à droite » sur la figure ci-dessous. Ceci permet de placer $\mathbf{t}$, en chaque point m voisin de m_0, sur l'allure de $\mathscr{S}$ donnée à la question 4. Remarquons que fortuitement $\mathbf{t}(0) = f'(0)$, puisque $f'(0)$ est unitaire dans notre cas.

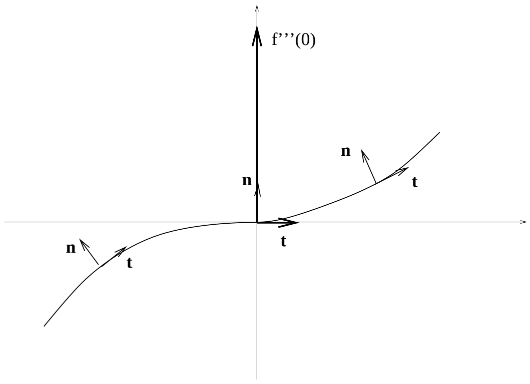


fig.examen2

Pour placer $\mathbf{n}$, on choisit l'unique vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$ orthogonal à $\mathbf{t}$, tel que $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$ est dans la même orientation que l'orientation choisie, c'est-à-dire ici celle de la base canonique.

Question 7. Le centre de courbure C_m de γ en m est par définition situé sur la normale à $T_m(\gamma)$, à distance $R_m = 1/\rho_m$ de m. Plaçons-nous en un point m où la courbure n'est pas nulle. Alors si g est une paramétrisation normale de Γ, telle que $g(s) = m$, on a d'une part par définition $g''(s) = \rho_m \mathbf{n}$ et le point m est d'allure ordinaire, la concavité de $\mathscr{S}$ étant dans le demi-plan délimité par $T_m(\gamma)$ et contenant $g''(s)$ d'après la Remarque **??**. Mais d'autre part, si $f = g \circ \theta$, on a $f'' = \theta'' g' \circ \theta + (\theta')^2 g'' \circ \theta$, d'après les calculs qui précèdent la Proposition **??**. Ce qui montre que la seconde coordonnées $(\theta')^2$ de $f''(c)$ dans la base $(g'(s) = \mathbf{t}, g''(s))$ est positive : il s'ensuit que la concavité de $\mathscr{S}$ est aussi dans le demi-plan délimité par $T_m(\gamma)$ et contenant $f''(c)$.

Comme $f''(c)$ tend vers $0_{\mathbb{R}^2}$ lorsque c tend vers 0 et que d'autre part $\|f'(c)\|$ est borné inférieurement par une constante positive et supérieurement, pour c voisin de 0 (ceci puisque $t \mapsto \|f'(t)\|$ est continue en $t = 0$ et vaut 1 en 0), la formule

$$\rho(c) = \det(f'(c), f''(c))/\|f'(c)\|^3.$$

montre que ρ_m tend vers 0 en m_0 comme $f''(c)$, et que le rayon de courbure R_m quant à lui tend vers $+\infty$. Le changement de concavité au voisinage du point d'inflexion donne alors l'allure suivante de la courbe que parcourt C_m pour m voisin de m_0.

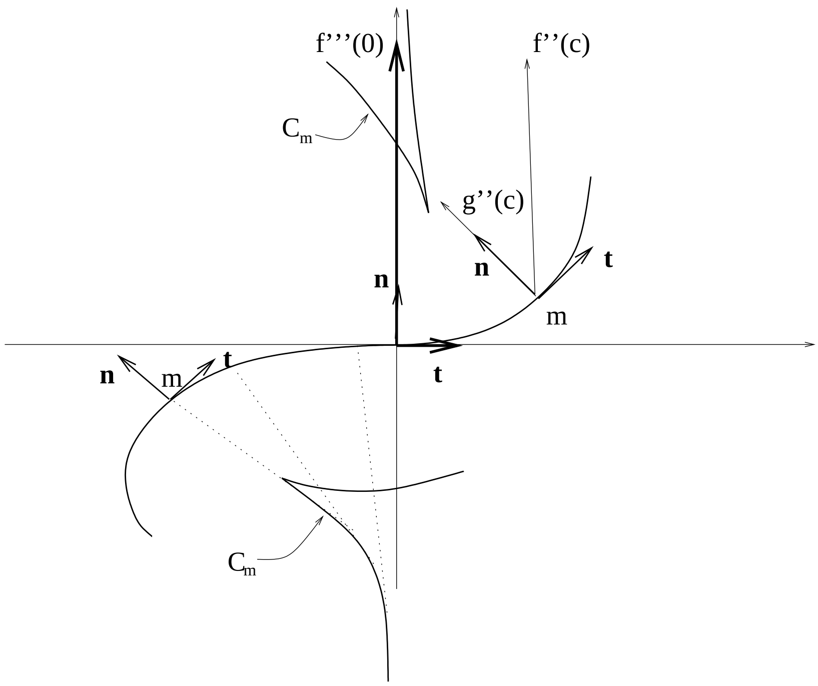
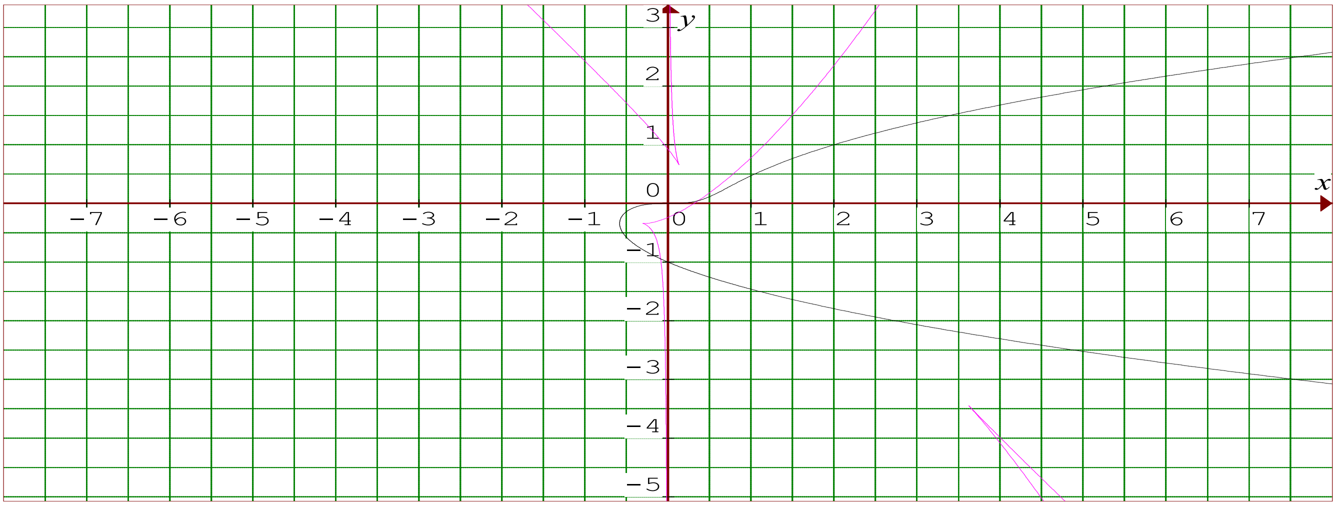


fig.examen3

Graphmatica 2.0i © 2012 kSoft, Inc. - Sans titre.gr



Equations à l'écran:

1. x=t+t^6 ; y=t^3 {-10,10}
2. x=t+t^6 - t(36t^10+12t^5+9t^4+1)/(2(1-9t^5)); y=t^3 + (1+6t^5)(36t^10+12t^5+9t^4+1)/(6t(1-9t^5)) {-10,10}