# MATH502 - Contrôle terminal du 20 décembre 2017

**(2pts)** **Questions de cours 1.** Soit $\Gamma$ un arc géométrique orienté de $\mathbb{R}^2$, immergé et de classe $C^2$.

- Donner la définition de la courbure algébrique $\rho$ de $\Gamma$.
- Donner la formule calculant $\rho$ en fonction d'une paramétrisation $(I, f)$ de $\Gamma$ et montrer à l'aide de cette formule que $\rho$ ne dépend pas de la paramétrisation choisie de $\Gamma$.

**(2pts)** **Questions de cours 2.** Soient $n, k \geq 1$ et $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

- Donner la définition d'un champ de vecteurs $\vec{u}$ de classe $C^k$ sur $U$. Donner la définition d'une forme différentielle $\varphi$ de degré 1 et de classe $C^k$ sur $U$.
- Expliciter la correspondance entre forme différentielle de degré 1 sur $U$ et champ de vecteurs sur $U$.

**(2pts)** **Questions de cours 3.** Énoncer le Lemme de Poincaré et la formule de Green-Riemann.

**Exercice 1.** Soit $\gamma = ([-1, 1], f)$, où $f(t) = (t^2, t^3)$, un arc paramétré de $\mathbb{R}^2$. On note $\mathscr{S}$ son support. On oriente $\mathbb{R}^2$ par la base canonique et on oriente l'arc géométrique $\Gamma$ par la paramétrisation $\gamma$. Le produit scalaire considéré sur $\mathbb{R}^2$ est le produit scalaire standard, qui fait de la base canonique une base orthonormée.

**(2pts)** **1.** Montrer que $f : ]-1, 1[ \to \mathscr{S}$ est une bijection $C^\infty$. L'arc $\gamma$ admet-il des points multiples ?

**(1pt)** **2.** La paramétrisation $\gamma$ est-elle une paramétrisation régulière ?

**(2pts)** **3.** Si $\gamma$ possède des points singuliers, représenter l'allure de $\mathscr{S}$ au voisinage de ces points.

**(3pts)** **4.** Montrer que $g : ]\frac{1}{2}, 1[ \to \mathscr{S}$ défini par $g = f_{|]\frac{1}{2}, 1[}$ est un plongement.

**(1pt)** **5.** Indiquer par une flèche sur l'allure de $\mathscr{S}$ le sens de parcours de $\mathscr{S}$ donné par $\gamma$. Représenter, en un point régulier $m$, le repère de Frenet $(m, \mathbf{t}, \mathbf{n})$ de $\gamma$.

**(2pts)** **6.** Sans calcul, mais en justifiant géométriquement sa position, représenter le centre de courbure $C_m$ de $\gamma$ en un point régulier $m \in \mathscr{S}$.

**(2pts)** **7.** Calculer la longueur $\ell$ de $\gamma$.

**Exercice 2.** Soit $\gamma$ l'arc paramétré de l'Exercice 1 et $\mathscr{A}$ l'aire du sous-ensemble compact $K$ de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière est constituée du support $\mathscr{S}$ de $\gamma$ et du segment $\mathscr{I} = [(1, -1), (1, 1)]$.

**(2pts)** **1.** À l'aide du théorème de Fubini, calculer l'aire $\mathscr{A}$.

**(2pts)** **2.** Calculer $\mathscr{A}$ à l'aide de la formule de Green-Riemann.

Tournez la page S.V.P.

**Exercice 3.** On note $\varphi$ la forme différentielle de degré 1, définie sur $U = \mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(x, y) = (x^2 - y^2)\mathrm{d}x - 2xy\mathrm{d}y,$$

et $\psi$ la forme différentielle de degré 1, définie sur $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ par

$$\psi(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}\mathrm{d}x \frac{x}{x^2 + y^2}\mathrm{d}y.$$

**(1pt)** **1.** La forme différentielle de degré 1 $\varphi$ est-elle fermée ?

**(1pt)** **2.** La forme différentielle de degré 1 $\varphi$ admet-elle une primitive sur $U$ ? Si oui, donner une telle primitive.

**(1pt)** **3.** Soit $\gamma = ([0, 1], f)$, où $f(t) = (\cos t^3, \log \sin(t^2 + 1))$. Calculer $\int_\gamma \varphi$.

**(1pt)** **4.** La forme différentielle de degré 1 $\psi$ est-elle fermée sur $V$ ?

**(2pts)** **5.** Soit $\alpha = ([0, 2\pi], g)$, où $g(t) = (\cos t, \sin t)$. Calculer $\int_\alpha \psi$. La forme différentielle de degré 1 $\psi$ admet-elle une primitive sur $V$ ?

**Corrigé du contrôle de MATH502 - Décembre 2017**

## Exercice 1.

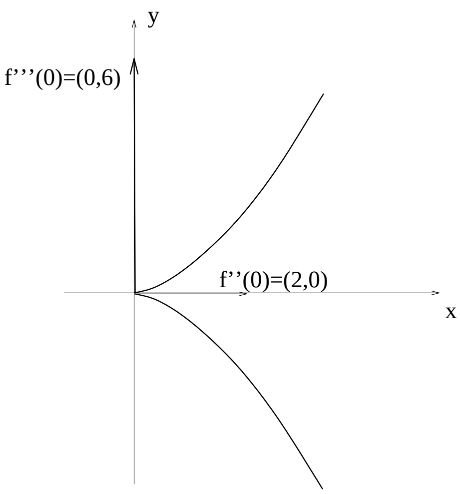
**Question 1.** Il suffit de remarquer que $f_2 : t \mapsto t^3$ est elle-même une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (il s'agit d'une application strictement croissante). Il s'ensuit que $f(t) = f(t')$ impliquant $f_2(t) = f_2(t')$, nécessairement $t = t'$, et donc $f$ est injective. En particulier, $f : ]-1, 1[ \to f(]-1,1[) = \mathscr{S}$ est surjective et injective, donc est une bijection. D'autre part $f$ est de classe $C^\infty$, car ses deux composantes le sont.

Comme $f$ est injective, $\gamma$ n'admet pas, par définition, de point multiple.

**Question 2.** Notons $f = (f_1, f_2)$. On a $f_1'(t) = f_2'(t) = 0 \iff 2t = 3t^2 = 0$, équation qui admet une unique solution en $t = 0$. Donc, puisque la question précédente $\gamma$ n'admet pas de points multiples, $\gamma$ n'admet qu'un seul point singulier.

**Question 3.** On a $f''(t) = (2, 6t)$, soit $f''(0) = (2, 0)$, puis $f'''(t) = (0, 6)$. Alors $f'''(0) = (0, 6)$ est la première dérivée en 0 non colinéaire à $f''(0)$ (le fait que $f'(0) \perp f'''(0)$ est un accident). On en déduit que $\gamma$ possède en $t = 0$ un point de rebroussement de première espèce.

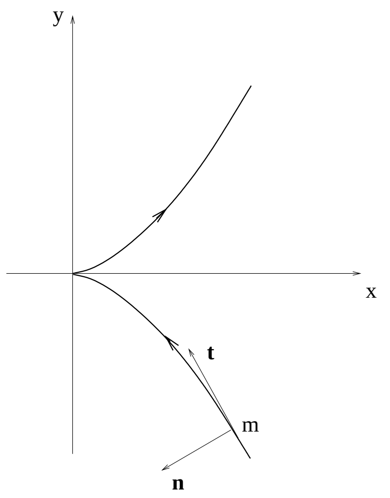
On représente les vecteurs $f'(0)$ et $f'''(0)$ dans $\mathbb{R}^2$. On connait alors l'allure locale de $\mathscr{S}$ au voisinage de $m_0$, du fait de la parité et de l'imparité des ordres (2 et 3) des deux premières dérivées en 0 linéairement indépendantes.




**Question 4.** D'après la question 1, $g : ]1/2, 1[ \to \mathscr{S}$ est une bijection $C^\infty$, donc continue et une immersion. Pour répondre à la question, il suffit par conséquent de démontrer que $g^{-1} : \mathscr{S} \to ]-1, 1[$ est continue.

Soit $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $g([\frac{1}{2}, 1])$ de limite $m = (x, y) = g(c)$. En particulier, on a $y = c^3$, ce qui équivaut à $c = y^{\frac{1}{3}}$. Montrons alors que $g^{-1}(m_n) = t_n$ converge vers $c$. En notant $m_n = (x_n, y_n)$, on a $m_n = g(g^{-1}(m_n))$ et donc $y_n = g_2(g^{-1}(m_n)) = g_2(t_n) = t_n^3$. Du fait que $y_n$ tend vers $y$ et que $t_n = g_2^{-1}(y_n) = y_n^{\frac{1}{3}}$, par continuité de $g_2^{-1}$ en $y$, on a nécessairement $t_n \to_{n \to \infty} y^{\frac{1}{3}} = c$.

**Question 5.**




Désignons par $(m, \mathbf{t}, \mathbf{n})$ le repère de Frenet de $\gamma$ en un point régulier $m = f(c)$. Par définition $\mathbf{t}$ est le vecteur unitaire tangent de $\gamma$, dont le sens est donné par l'orientation de $\gamma$, c'est-à-dire que $\mathbf{t}$ est colinéaire à $f'(c)$ et de même sens que $f'(c)$. Dans la tangente $T_m(\gamma)$ en $m$ à $\gamma$, la direction de $f'(c)$ est donnée par le « sens de parcours de $\mathscr{S}$ suivant les paramètres croissants ». Ceci permet de placer $\mathbf{t}$ sur l'allure de $\mathscr{S}$ donnée à la question 3.

Pour placer $\mathbf{n}$, on choisit l'unique vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$ orthogonal à $\mathbf{t}$, tel que $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$ est dans la même orientation que l'orientation choisie, c'est-à-dire ici celle de la base canonique.

**Question 6.** Le centre de courbure $C_m$ de $\gamma$ en $m$ est par définition donné par $C_m = m + g''(s)$, si $g$ est une paramétrisation normale de $\Gamma$, telle que $g(s) = m$. Ainsi $C_m$ est situé sur la normale à $T_m(\gamma)$. Plaçons-nous en un point $m$ où la courbure n'est pas nulle. Alors comme $g'(s)$ et $g''(s)$ sont linéairement indépendants, le point $m$ est d'allure ordinaire, et la concavité de $\mathscr{S}$ étant dans le demi-plan délimité par $T_m(\gamma)$ et contenant $g''(s)$, ce demi-plan contient aussi $C_m$ Ainsi $C_m$ est dans le demi-plan de concavité de $\gamma$ en $m$.

**Question 7.** La longueur $\ell$ de $\gamma$ est deux fois la longueur de $\gamma_{\restriction[0,1]}$, par symétrie orthogonale de $\gamma$ par rapport à $Ox$. On a donc

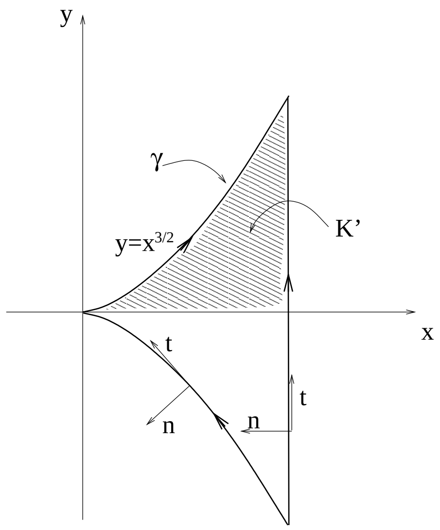
$$\ell = 2 \int_{t\in[0,1]} \sqrt{4t^2 + 9t^4}\ \mathrm{d}t = 2 \int_{t\in[0,1]} t\sqrt{4 + 9t^2}\ \mathrm{d}t.$$

Comme $\frac{2}{3}\frac{1}{9}\frac{1}{2}(4 + 9t^2)^{\frac{3}{2}}$ a pour dérivée $t\sqrt{4 + 9t^2}$ , on a obtient

$$\ell = \frac{2}{27}\left[(4 + 9t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{27}(13^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}).$$

## Exercice 2

**Question 1.** L'aire $\mathscr{A}$ est le double de l'aire du compact $K'$ de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière est le support de l'arc $k : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $k(t) = (t^2, t^3)$ et le segment $[(1, 0), (1, 1)]$.




En effet $K = K' \cup \sigma(K')$, où $\sigma$ est la symétrie orthogonale d'axe $Ox$ et $K' \cap \sigma(K')$ est le segment $[(0,0),(1,0)]$, qui est négligeable pour la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2$. On a donc, puisque l'isométrie $\sigma$ préserve $\mu_2$,

$$\mu_2(K) = \mu_2(K') + \mu_2(\sigma(K')) - \mu_2(K' \cap \sigma(K')) = \mu_2(K') + \mu_2(\sigma(K')) = 2\mu_2(K').$$

Notons que le support $\mathscr{S}'$ de $k$ est le graphe de l'application $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $p(t) = t^{\frac{3}{2}}$. D'après le théorème de Fubini, il s'ensuit que

$$\mu_2(K') = \int_{K'} 1 \mathrm{d}\mu_2 = \int_{x\in[0,1]} \int_{y\in[0,x^{\frac{3}{2}}]} 1 \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}x = \int_{x\in[0,1]} x^{\frac{3}{2}} \ \mathrm{d}x = \frac{2}{5}\left[x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{5}.$$

Ainsi $\mathscr{A} = \frac{4}{5}$.

**Question 2.** Pour calculer $\mathscr{A}$, on peut utiliser la formule de Green-Riemann, puisque $K$ est un compact à bord. Donnons une paramétrisation de $\partial K$. $\gamma : [-1,1] \to \mathscr{S}$ paramètre $\mathscr{S}$, et $\alpha : [-1,1] \to \mathscr{I}$ où $\alpha(t) = (1,t)$, paramètre $\mathscr{I}$. Afin que la paramétrisation de $\partial K$ soit compatible avec l'orientation de $\partial K_+$ par la normale rentrante, l'orientation de $\mathbb{R}^2$ étant celle de la base canonique, il convient de renverser l'orientation de $\gamma$, en considérant $\gamma_+(t) = \gamma(-t) = (t^2, -t^3)$. On a alors par la formule de Green-Riemann

$$\mathscr{A} = \int_{\gamma_+} x \ \mathrm{d}y + \int_{\alpha} x \ \mathrm{d}y,$$

$$\mathscr{A} = \int_{t\in[-1,1]} t^2(-3t^2) \ \mathrm{d}t + \int_{t\in[-1,1]} 1 \cdot 1 \ \mathrm{d}t = -3\left[\frac{t^5}{5}\right]_{-1}^1 + 2 = \frac{-6}{5} + 2 = \frac{4}{5}.$$

## Exercice 3

**Question 1.** Un calcul direct montre que

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) = -2y = \frac{\partial}{\partial y}(-2xy).$$

La forme $\varphi$ est donc fermée.

**Question 2.** Comme $U$ est étoilé et que $\varphi$ est fermée, $\varphi$ admet une primitive sur $U$, d'après le lemme de Poincaré. Notons $g : U \to \mathbb{R}$ une telle primitive. On a

$$\frac{\partial g}{\partial x} = x^2 - y^2 \iff g(c, y) = \frac{x^3}{3} - xy^2 + C(y)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -2xy \iff -2xy + C'(y) = -2xy \iff C'(y) = 0 \iff C(y) = C \in \mathbb{R}.$$

On en conclut que $g(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy^2$ est une primitive de $g$ sur $U$ (On choisit $C = 0$, une primitive de $\varphi$ étant définie à une constante près).

**Question 3.** On a $f(0) = (1, \log \sin 1)$ et $f(1) = (\cos 1, \log \sin 2)$. Puisque $\varphi$ admet $g$ pour primitive sur $U$,

$$\int_\gamma \varphi = g(f(1)) - g(f(0)) = \frac{\cos^3 1}{3} - \cos 1 \log^2 \sin 2 - \frac{1}{3} + \log^2 \sin 1.$$

**Question 4.** Un calcul direct montre que $\psi$ est fermée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

**Question 5.** Comme $V$ n'est pas étoilée, on ne peut pas appliquer le lemme de Poincaré pour déduire de la fermeture de $\psi$ que $\psi$ est exacte. Calculons $\int_\alpha \psi$. On a

$$\int_\alpha \psi = \int_0^{2\pi} - \sin t(-\sin t) + \cos t(\cos t) \; \mathrm{d}t = 2\pi.$$

Si $\psi$ était exacte sur $V$, on aurait $\int_\alpha \psi = 0$ car $\alpha$ est fermé. Il s'ensuit que $\psi$ n'admet pas de primitive sur $V$. Notons qu'une recherche de primitive de $\varphi$ sur un ouvert $W$ impose d'exclure de $W$ au moins une demi-droite du type $\mathbb{R}_- \times \{0\}$.