

MATH502 - Contrôle terminal du 27 février 2018

Aucun document, aucun appareil électronique autorisé. Les points en marge sont donnés à titre de comparaison d'une question à l'autre. Les notes seront ramenées à 20.

- (2pts) **Questions de cours 1.** Donner la définition d'un arc géométrique orienté Γ de \mathbb{R}^n .
- (2pts) **Questions de cours 2.** Soient $n, k \geq 1$ et U un ouvert de \mathbb{R}^n .
- Donner la définition d'un champ de vecteurs \vec{u} de classe C^k sur U . Donner la définition d'une forme différentielle φ de degré 1 et de classe C^k sur U .
 - Expliciter la correspondance entre forme différentielle de degré 1 sur U et champ de vecteurs sur U .
- (2pts) **Questions de cours 3.** Énoncer le Lemme de Poincaré et la formule de Green-Riemann.

Exercice 1. Soit $\gamma = (\mathbb{R}, f)$, où $f(t) = (t^2, t^4 + t^5)$, un arc paramétré de \mathbb{R}^2 . On note \mathcal{S} son support. On oriente \mathbb{R}^2 par la base canonique et on oriente l'arc géométrique Γ par la paramétrisation γ . Le produit scalaire considéré sur \mathbb{R}^2 est le produit scalaire standard, qui fait de la base canonique une base orthonormée.

- (2pts) 1. Montrer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}$ est une bijection C^∞ .
- (2pts) 2. Si γ possède des points singuliers, représenter l'allure de \mathcal{S} au voisinage de ces points.
- (3pts) 3. Montrer que $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathcal{S}$ défini par $g = f|_{]0, +\infty[}$ est un plongement.
- (3pts) 4. Représenter \mathcal{S} après avoir fait l'étude de γ :
- tableau des variations des composantes de f ,
 - tangentes horizontales ou verticales éventuelles,
 - étude des branches asymptotiques éventuelles.
- (1pt) 5. Indiquer par une flèche sur l'allure de \mathcal{S} le sens de parcours de \mathcal{S} donné par γ . Représenter, en un point régulier m , le repère de Frenet $(m, \mathbf{t}, \mathbf{n})$ de γ .
- (2pts) 6. Sans calcul, mais en justifiant géométriquement sa position, représenter le centre de courbure C_m de γ en un point régulier $m \in \mathcal{S}$.
- (2pts) 7. Montrer que la courbure de γ en m tend vers 0 lorsque $\|m\| \rightarrow +\infty$

Exercice 2. Soit γ l'arc paramétré de l'Exercice 1 et \mathcal{A} l'aire du sous-ensemble compact K de \mathbb{R}^2 dont la frontière est constituée du support \mathcal{S} de γ et du segment $\mathcal{S} = [(1, 0), (1, 2)]$ de \mathbb{R}^2 .

- (2pts) 1. Pour $x \in [0, 1]$, déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_x := K \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \in \mathbb{R}\}$, et calculer sa longueur.
- (2pts) 2. À l'aide du théorème de Fubini, calculer l'aire \mathcal{A} .
- (2pts) 3. Calculer \mathcal{A} à l'aide de la formule de Green-Riemann.

Exercice 3. On note φ la forme différentielle de degré 1, définie sur $U = \mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(x, y) = (-y \sin xy)dx - (x \sin xy)dy,$$

et ψ la forme différentielle de degré 1, définie sur $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par

$$\psi(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}dx + \frac{y}{x^2 + y^2}dy.$$

- (1pt) 1. La forme différentielle de degré 1 φ est-elle fermée sur U ?
- (2pts) 2. Dire sans calcul si la forme différentielle de degré 1 φ admet une primitive sur U ? Si oui, donner une telle primitive.
- (2pts) 3. Soit $\gamma = ([0, 1], f)$ un arc paramétré de \mathbb{R}^2 , où $f(t) = (\cos t + \sin(\log(t + 1)), t + \sin t)$. Calculer $\int_{\gamma} \varphi$.
- (1pt) 4. La forme différentielle de degré 1 ψ est-elle fermée sur V ?
- (2pts) 5. Rechercher une primitive de ψ sur V . La forme différentielle de degré 1 ψ est-elle exacte sur V ?
-

Exercice 1

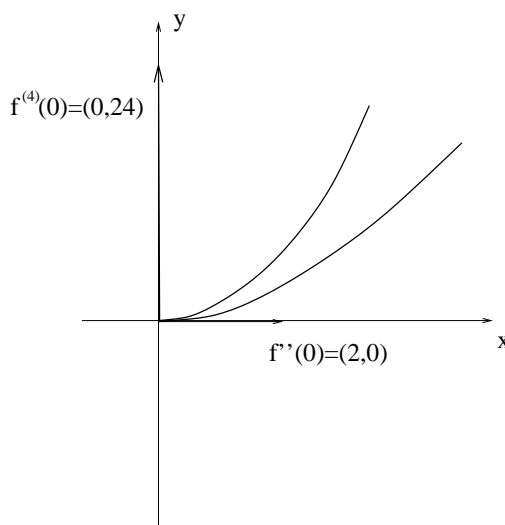
Question 1. Cherchons les points multiples de $f = (f_1, f_2)$. Soient $s, t \in \mathbb{R}$, tels que $f(t) = f(s)$. Alors, cette égalité appliquée à f_1 donne $s^2 = t^2 \iff s^2 - t^2 = (s-t)(s+t) = 0 \iff s = -t$ ou $s = t$. Mais $f_2(t) = f_2(-t)$ donne $t^4 + t^5 = t^4 - t^5$, soit $t = s = 0$. En conclusion, l'arc γ est simple.

Question 2. On a $f'_1(t) = f'_2(t) = 0 \iff 2t = 4t^3 + 5t^4 = 0$, équation qui admet une unique solution en $t = 0$. Donc, puisque d'après la question précédente γ n'admet pas de points multiples, γ n'admet qu'un seul point singulier qui est $f(0) = (0, 0)$.

On a $f''(t) = (2, 12t^2 + 20t^3)$, soit $f''(0) = (2, 0)$, $f'''(t) = (0, 24t + 60t^2)$, soit $f'''(0) = (0, 0)$, $f^{(4)}(t) = (0, 24 + 120t)$, soit $f^{(4)}(0) = (0, 24)$.

Alors $f^{(4)}(0) = (0, 24)$ est la première dérivée en 0 non colinéaire à $f''(0)$ (le fait que $f'(0) \perp f'''(0)$ est un accident). Ainsi γ possède en $t = 0$ un point de rebroussement de seconde espèce et sa tangente est dirigée par le vecteur $f''(0) = (2, 0)$, qui est horizontal.

On représente les vecteurs $f''(0)$ et $f^{(4)}(0)$ dans \mathbb{R}^2 . On connaît alors l'allure locale de \mathcal{S} au voisinage de $(0, 0)$, du fait de la parité des ordres (2 et 4) des deux premières dérivées en 0 linéairement indépendantes.



Question 3. D'après la question 1, $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathcal{S}$ est une bijection C^∞ , donc continue et une immersion. Pour répondre à la question, il suffit par conséquent de démontrer que $g^{-1} : \mathcal{S} \rightarrow]0, +\infty[$ est continue.

Soient $m = (x, y) = g(c) \in \mathcal{S}$, pour $c \in]0, +\infty[$ et $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $g(]0, +\infty[)$ de limite m . Notons $t_n = g^{-1}(m_n)$, on va montrer que t_n tend vers $g^{-1}(m) = c$.

On a $x = c^2$ et $c > 0$, donc $c = \sqrt{x}$.

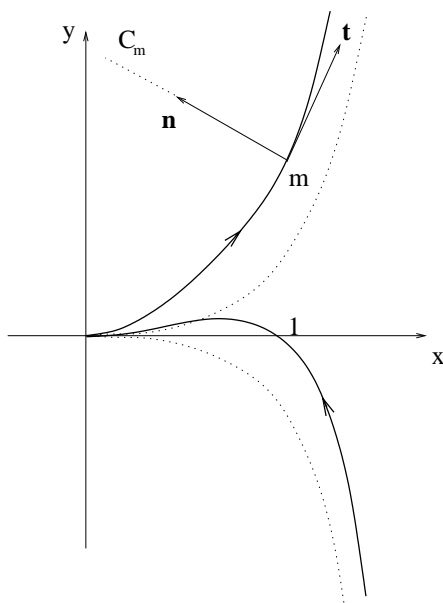
De même, en notant $m_n = (x_n, y_n)$, on a $x_n = t_n^2$, donc $t_n = \sqrt{x_n}$. Et comme $u \mapsto \sqrt{u}$ est continue en x et que x_n tend vers x , t_n tend vers $\sqrt{x} = c$.

Question 4. La fonction f_1 est décroissante sur \mathbb{R}_- , croissante sur \mathbb{R}_+ et f'_1 ne s'annule qu'en $t = 0$. On a $f'_2(t) = 4t^3 + 5t^4 = t^3(4 + 5t)$, donc f_2 est croissante sur $] -\infty, -\frac{4}{5}]$, croissante sur $[-\frac{4}{5}, 0]$ et décroissante sur $[0, +\infty[$. En dehors du point singulier $(0, 0)$, γ possède une tangente horizontale en $t = -\frac{4}{5}$. D'où le tableau de variations suivant

t	$-\infty$	$-\frac{4}{5}$	0	$+\infty$		
$f_1'(t)$		-	-	0	+	
$f_2'(t)$		+	0	-	0	+
$f_1(t)$	$+\infty$		$\frac{16}{25}$	0		$+\infty$
$f_2(t)$	$-\infty$		$(\frac{4}{5})^4 + (\frac{4}{5})^5$	0		$+\infty$

L'arc γ possède une branche infinie en $-\infty$ et une autre en $+\infty$. Comme $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{f_2(t)}{f_1(t)} = +\infty$, γ possède une direction asymptotique verticale en $\pm\infty$. Et comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_1(t) = +\infty$, il s'agit d'une branche parabolique. Enfin, pour $t > 0$, on a $t = \sqrt{f_1(t)}$, donc $f_2 = f_1^2 + f_1^{\frac{5}{2}} \sim_{t \rightarrow +\infty} f_1^5$. De même, pour $t < 0$, $f_2 = f_1^2 - f_1^{\frac{5}{2}} \sim_{t \rightarrow -\infty} -f_1^{\frac{5}{2}}$, et la courbe $x \mapsto \pm x^{\frac{5}{2}}$ est asymptote de γ en $\pm\infty$.

On déduit de cette étude l'allure suivante de \mathcal{S} .



Question 5. Désignons par $(m, \mathbf{t}, \mathbf{n})$ le repère de Frenet de γ en un point régulier $m = f(c)$. Par définition \mathbf{t} est le vecteur unitaire tangent de γ , dont le sens est donné par l'orientation de γ , c'est-à-dire que \mathbf{t} est colinéaire à $f'(c)$ et de même sens que $f'(c)$. Dans la tangente $T_m(\gamma)$ en m à γ , la direction de $f'(c)$ est donnée par le « sens de parcours de \mathcal{S} suivant les paramètres croissants ». Ceci permet de placer \mathbf{t} sur l'allure de \mathcal{S} donnée à la question 4.

Pour placer \mathbf{n} , on choisit l'unique vecteur unitaire de \mathbb{R}^2 orthogonal à \mathbf{t} , tel que (\mathbf{t}, \mathbf{n}) est dans la même orientation que l'orientation choisie, c'est-à-dire ici celle de la base canonique.

Question 6. Le centre de courbure C_m de γ en m est par définition donné par $C_m = m + g''(s)$, si g est une paramétrisation normale de Γ , telle que $g(s) = m$. Ainsi C_m est situé sur la normale à $T_m(\gamma)$, puisque $g''(s) \perp g'(s) = \mathbf{t}$. Plaçons-nous en un point m où la courbure n'est pas nulle.

Alors comme $g'(s)$ et $g''(s)$ sont linéairement indépendants, le point m est d'allure ordinaire, et la concavité de \mathcal{S} étant dans le demi-plan délimité par $T_m(\gamma)$ et contenant $g''(s)$, ce demi-plan contient aussi C_m . Ainsi C_m est dans le demi-plan de concavité de γ en m .

Question 7. La courbure de γ est donnée par

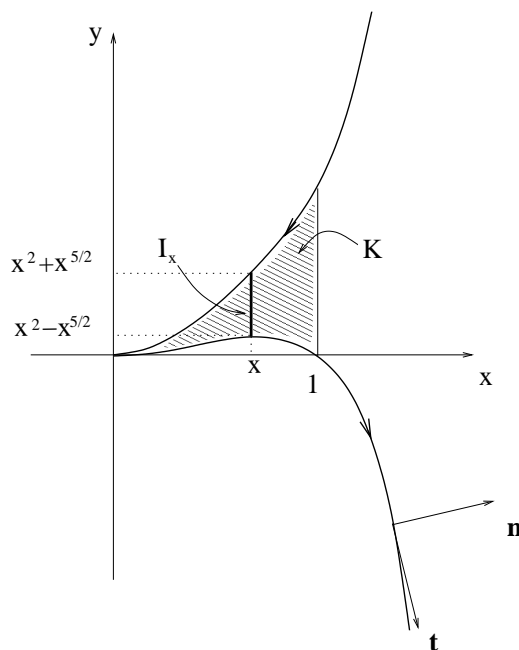
$$\rho = \frac{f_1' f_2'' - f_1'' f_2'}{(f_1'^2 + f_2'^2)^{3/2}}.$$

Le calcul montre que

$$\rho = \frac{t}{|t|} \frac{16 + 30t}{(4 + t^4(4 + 5t)^2)^{3/2}} \rightarrow_{t \rightarrow \pm\infty} 0.$$

Exercice 2

Question 1. Si $x \in [0, 1]$, la droite $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \in \mathbb{R}\}$ rencontre \mathcal{S} en $f(t) = (x, y)$ tel que $t^2 = x$ et $y = t^4 + t^5$. Ce qui donne, $t = \pm\sqrt{x}$ et donc $y = x^2 \pm x^{5/2}$. On en conclut que \mathcal{S}_x est le segment de \mathbb{R}^2 d'extrémités $(x, x^2 - x^{5/2})$ et $(x, x^2 + x^{5/2})$. La longueur de \mathcal{S}_x est donc $\ell_x = x^2 + x^{5/2} - (x^2 - x^{5/2}) = 2x^{5/2}$.



Question 2. D'après le théorème de Fubini, il s'ensuit que

$$\mathcal{A} = \mu_2(K) = \int_K 1 d\mu_2 = \int_{x \in [0,1]} \ell_x dx = \int_{x \in [0,1]} 2x^{5/2} dx = \frac{4}{7} \left[x^{7/2} \right]_0^1 = \frac{4}{7}.$$

Question 3. Pour calculer \mathcal{A} , on peut utiliser la formule de Green-Riemann, puisque K est un compact à bord. Donnons une paramétrisation de ∂K . $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathcal{S}$ paramètre la partie du bord de K qui est dans \mathcal{S} , et $\alpha : [0, 2] \rightarrow \mathcal{S}$ où $\alpha(t) = (1, t)$, paramètre \mathcal{S} . Afin que la paramétrisation de ∂K soit compatible avec l'orientation de ∂K_+ par la normale rentrante, l'orientation de \mathbb{R}^2 étant celle de la base canonique, il convient de renverser l'orientation de γ , en considérant γ_+ paramétré par $f_+(t) = f(-t) = (t^2, t^4 - t^5)$. On a alors par la formule de Green-Riemann

$$\mathcal{A} = \int_{\gamma_+} x dy + \int_{\alpha} x dy,$$

$$\mathcal{A} = \int_{t \in [-1,1]} t^2(4t^3 - 5t^4) dt + \int_{t \in [-1,1]} 1 \cdot 1 dt = \left[4 \frac{t^6}{6} - 5 \frac{t^7}{7} \right]_{-1}^1 + 2 = \frac{-10}{7} + 2 = \frac{4}{7}.$$

Exercice 3

Question 1. Un calcul direct montre que

$$\frac{\partial}{\partial y}(-y \sin xy) = -\sin y - xy \cos xy = \frac{\partial}{\partial x}(-x \sin xy).$$

La forme φ est donc fermée.

Question 2. Comme U est étoilé et que φ est fermée, φ admet une primitive sur U , d'après le lemme de Poincaré. Notons $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ une telle primitive. Il existe alors une fonction dérivable $y \mapsto C(y)$ telle que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -y \sin xy \iff g(x, y) = \cos xy + C(y)$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y} = -x \sin xy &\iff \frac{\partial g}{\partial y}(\cos xy + C(y)) = -x \sin xy + C'(y) = -x \sin xy \\ &\iff C'(y) = 0 \iff C(y) = C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On en conclut que $g(x, y) = \cos xy$ est une primitive de g sur U (On choisit $C = 0$, une primitive de φ étant définie à une constante près).

Question 3. On a $f(0) = (1, 0)$ et $f(1) = (\cos 1 + \sin \log 2, 1 + \sin 1)$. Puisque φ admet g pour primitive sur U ,

$$\int_{\gamma} \varphi = g(f(1)) - g(f(0)) = \cos((\sin \log 2 + \cos 1)(1 + \sin 1)) - 1.$$

Question 4. Un calcul direct montre que ψ est fermée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Question 5. Comme V n'est pas étoilé, on ne peut pas appliquer le lemme de Poincaré pour déduire de la fermeture de ψ que ψ est exacte.

Si $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de ψ sur V , on a pour tout $(x, y) \in V$ l'existence d'une fonction dérivable $y \mapsto C(y)$ telle que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \iff g(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + C(y)$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} &\iff \frac{\partial g}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + C(y) \right) = \frac{y}{x^2 + y^2} + C'(y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \\ &\iff C'(y) = 0 \iff C(y) = C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On en conclut que $g(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$ est une primitive de g sur V (On choisit $C = 0$, une primitive de φ étant définie à une constante près). Par définition la forme différentielle de degré 1 ψ est exacte sur V .
