MATH602 - Contrôle du 27 mars 2019

(2pts) **Questions de cours.** Donner la définition d'un arc paramétré $\gamma = (I, f)$ rectifiable et de sa longueur. Montrer que ces définitions ne dépendent pas du choix de la paramétrisation de l'arc géométrique Γ dont γ est une paramétrisation.

Exercice 1. On considère le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}^2$

$$\mathscr{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^3 = 0\}.$$

(2pts) **1.** Montrer à l'aide du théorème de la fonction implicite qu'en tout point $(x, y) \in \mathscr{C} \setminus \{(0, 0)\}$, $\mathscr{C}$ est localement le graphe, dans un certain repère de $\mathbb{R}^2$ que l'on précisera, d'une fonction C^∞ définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

(2pts) **2.** Montrer que

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (t^3, t^2) \end{array}$$

est un arc paramétré C^∞, noté γ, dont le support est $\mathscr{C}$.

(2pts) **3.** Donner les points lisses de γ et comparer avec votre réponse à la question 1.

(2pts) **4.** Déterminer l'allure de $\mathscr{C}$ au voisinage de $(0, 0)$. L'ensemble $\mathscr{C}$ est-il localement le graphe, dans un certain repère de $\mathbb{R}^2$, d'une fonction C^∞ définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$? La réponse à cette question était-elle déjà faite à la question 1 ?

(2pts) **5.** Calculer la courbure algébrique de γ ($\mathbb{R}^2$ étant orienté par la base canonique) en un point $m \in \mathscr{C} \setminus \{(0, 0)\}$.

Exercice 2. On considère le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathscr{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2; z - x^2 - y^2 = 0\}.$$

On note $m = (1, 0, 1) \in \mathscr{S}$ et on oriente l'espace $\mathbb{R}^3$ par la base canonique.

(2pts) **1.** Trouver à l'aide du théorème de la fonction implicite les points $(x, y, z) \in \mathscr{S}$, au voisinage desquels $\mathscr{S}$ est localement le graphe d'une fonction $g : (x, z) \mapsto y$, C^∞ et définie sur un domaine de Oxz.

(2pts) **2.** On considère le plan Π_θ de $\mathbb{R}^2$, contenant $\vec{e_3} = (0, 0, 1)$ et $\vec{i_\theta} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$, pour $\theta \in \mathbb{R}$. Donner une équation paramétrique de Π_θ puis donner l'intersection de Π_θ et $\mathscr{S}$. En déduire l'allure de $\mathscr{S}$.

(2pts) **3.** Montrer que

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & (x, y, x^2 + y^2) \end{array}$$

est une paramétrisation cartésienne C^∞ d'une surface orientée Σ_+ dont le support est $\mathscr{S}$.

(2pts) **4.** Donner le vecteur normal unitaire $\mathbf{N}$ à Σ_+ et l'équation du plan tangent à Σ en $m = (1, 0, 1)$.

(2pts) **5.** Donner l'expression de la seconde forme quadratique fondamentale $\boldsymbol{\Psi}$ de Σ_+ en $m = (1, 0, 1)$, en fonction des coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathscr{B}_f = (f'_x, f'_y)$ de $T_m\Sigma$. Quelle est la nature du point m ?

Tournez la page S.V.P.

(2pts) **5.** Donner les courbures principales σ_1 et σ_2 de Σ_+ en $m = (1, 0, 1)$.

(2pts) **6.** Donner une paramétrisation qui soit un plongement, dont le support est $\mathscr{S} \cap Oxz$ et calculer sa courbure en $m = (1, 0, 1)$.

En déduire la courbure d'un arc paramétré plongé dont le support est $\mathscr{S} \cap \Pi$, où Π est le plan de $\mathbb{R}^3$ passant par m, contenant $\mathbf{N}$ et orthogonal à Oxz.

Corrigé du contrôle de MATH602 - 27 mars 2019

Exercice 1.

Question 1. En notant $\varphi(x,y,z) = x^2 - y^3$, on a $\overrightarrow{\text{grad}}\varphi(x,y) = (-2x, -3y^2) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)$. On peut donc appliquer le théorème de la fonction implicite en tout point m de $\mathscr{C} \setminus \{(0,0)\}$, et celui-ci fournit une application C^∞ (au-dessus d'un intervalle de Ox, puisque $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(m) \neq 0$, pour tout $m \in \mathscr{C} \setminus \{(0,0)\}$) dont le graphe dans le repère $(m, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ est un voisinage de m dans $\mathscr{C}$. En revanche en $(0,0)$, le théorème de la fonction implicite ne permet pas de conclure que $\mathscr{C}$ est localement le graphe d'une application C^∞..

Question 2. Par définition,

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & (t^3, t^2) \end{array}$$

est un arc paramétré C^∞. On a $\varphi(f(t)) = (t^3)^2 - (t^2)^3 = 0$, donc $f(\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}$. Réciproquement, si $(x,y) \in \mathscr{C}$, en notant $t = x^{1/3}$, on a $y^3 = x^2 = t^6 > 0$, donc $y = t^2$. Il s'ensuit que $(x,y) = (t^3, t^2) \in f(\mathbb{R})$.

Question 3. Les points lisses $m = \gamma(t)$ de γ sont donnés par $\text{mult}_\gamma(\gamma(t)) = 1$ et $f'(t) \neq 0$. Or $(t^3, t^2) = (s^3, s^2)$, donne $t^2 - s^2 = (s-t)(s+t) = 0$, ce qui donne $s = t$ ou $s - t$. Mais si $s = -t$, $t^3 = s^3$ donne $t^3 = -t^3$, ce qui fournit $t = s = 0$. On peut aussi plus rapidement remarquer que si une composante d'une paramétrisation est injective, la paramétrisation en question est elle-même injective. Ici $t \mapsto t^3$ est injective. La paramétrisation f est donc injective, ce qui montre au passage que l'arc géométrique dont γ est une paramétrisation est orientable. Enfin, $f'(t) = (3t^2, 2t) = 0$ équivaut à $t = 0$. Il s'ensuit que le seul point singulier de γ est $(0,0)$. Il s'ensuit que localement en tout point $m \neq (0,0)$, $\mathscr{C}$ est le graphe d'une fonction C^∞. Un résultat déjà contenu dans la réponse à la question 1. On ne peut toujours pas trancher en revanche la nature géométrique du point $(0,0)$, dont on sait seulement qu'il est un point singulier de γ.

Question 4. On a $f''(0) = (0,2)$ et $f'''(0) = (6,0)$. Il s'ensuit, puisque ces deux vecteurs sont indépendants, que γ présente en m un point de rebroussement de première espèce, de direction $(0,2)$. À ce titre en $(0,0)$, $\mathscr{C}$ ne peut être un graphe qu'au-dessus d'un voisinage de 0 dans Ox, dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Mais il s'agit alors du graphe de la fonction $y = x^{2/3}$, qui est C^0 et non C^1 en $x = 0$.

Question 5. Calculons ρ, la courbure algébrique de γ en un point $m = f(t) \in \mathscr{C} \setminus \{(0,0)\}$. On a $f'(t) = (3t^2, 2t)$, $f''(t) = (6t, 2)$, donc, en notant $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\det_{\mathscr{B}}(f', f'') = -6t^2$. Et $\rho(f(t)) = -6t^2/\|f'(t)\|^3 = -6t^2/\sqrt{9t^4 + 4t^2}^3 = -6/|t|\sqrt{9t^2 + 4}^3$.

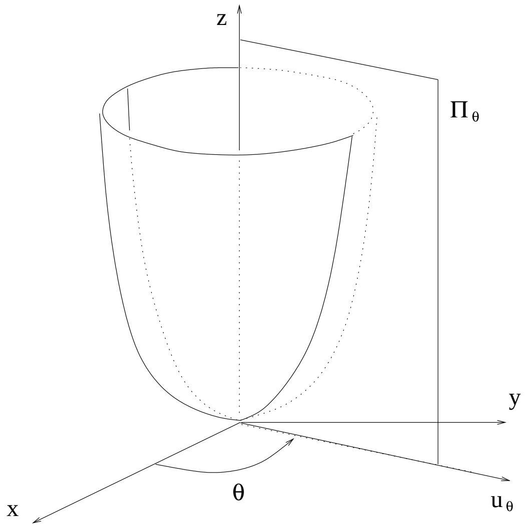
Exercice 2.

Question 1. Notons $\varphi(x,y,z) = z - x^2 - y^2$. Le théorème de la fonction implicite appliqué en tout point $m = (m_1, m_2, m_3)$ de $\mathscr{S}$ tel que $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(m) = -2m_2 \neq 0$ fournit une application C^∞ au-dessus d'un domaine de Oxz contenant (m_1, m_3), dont le graphe dans le repère $(m, \vec{e_1}, \vec{e_3}, \vec{e_2})$ est un voisinage de m dans $\mathscr{S}$. Or $m_2 = 0$ signifie que $m_3 = m_1^2$. Autrement dit, le théorème de la fonction implicite montre que $\mathscr{S}$ est localement en chaque point de $\mathscr{S} \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2, y = 0\}$ le graphe d'une fonction C^∞ au-dessus d'un domaine de Oxz.

Question 2. On considère le plan Π_θ de $\mathbb{R}^2$, contenant $\vec{e_3} = (0,0,1)$ et $\vec{i_\theta} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$, pour $\theta \in \mathbb{R}$.

On a $\Pi_\theta = \{a\vec{i_\theta} + b\vec{e_3}; a, b \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x = a\cos\theta, y = a\sin\theta, z = b\}$. Il s'ensuit que $\Pi_\theta \cap \mathscr{S} = \{(x,y,b) \in\in \mathbb{R}^3; x = a\cos\theta, y = a\sin\theta, b = a^2\} = \{a\vec{i_\theta} + a^2\vec{e_3}; a \in \mathbb{R}\}$, c'est-à-dire que $\Pi_\theta \cap \mathscr{S}$ est la parabole de Π_θ d'équation $b = a^2$ dans le repère $(O, \vec{i_\theta}, \vec{e_3})$ de Π_θ.

Puisque ce calcul est valable pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, $\mathscr{S}$ est le paraboloïde de révolution autour de l'axe Oz, de génératrice la parabole d'équation $z = x^2$ dans Oxz.



Question 3. L'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x,y,x^2+y^2) \end{array}$$

est par définition une paramétrisation cartésienne d'une surface Σ. Comme cette paramétrisation est injective, la surface Σ est orientable et on choisit de l'orienter à l'aide de la paramétrisation f. Montrons que le support de f est $\mathscr{S}$. On a $m = (x,y,z) \in f(\mathbb{R}^2) \iff z = x^2 + y^2 \iff m \in \mathscr{S}$.

Question 4. On a $f'_x(m) = (1,0,2)$ et $f'_y(m) = (0,1,0)$. Le vecteur normal unitaire $\mathbf{N}$ à Σ_+ en m est par définition

$$\mathbf{N} = \frac{f'_x(m) \wedge f'_y(m)}{\|f'_x(m) \wedge f'_y(m)\|} = \frac{(-2,0,1)}{\sqrt{5}}$$

L'équation du plan tangent à Σ en $m = (1,0,1)$ est $-2X+Z+1 = 0$, du fait que $(X,Y,Z) \in T_m\Sigma$ $\iff ((X-1,Y,Z-1)|\mathbf{N}) = 0$.

Question 5. On a $f''_{x^2}(m) = (0,0,2)$, $f''_{xy}(m) = (0,0,0)$, $f''_{y^2}(m) = (0,0,2)$. La seconde forme quadratique fondamentale $\mathbf{\Psi}$ de Σ_+ en m, en fonction des coordonnées (α,β) d'un vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathscr{B}_f = (f'_x, f'_y)$ de $T_m\Sigma$, est donnée par

$$\mathbf{\Psi}(\vec{u}) = \alpha^2 L + 2\alpha\beta M + \beta^2 N,$$

où $L = (f''_{x^2}|\mathbf{N})$, $M = (f''_{xy}|\mathbf{N})$, $N = (f''_{y^2}|\mathbf{N})$. De sorte que

$$\mathbf{\Psi}(\vec{u}) = \frac{2}{\sqrt{5}}(\alpha^2 + \beta^2),$$

La forme $\mathbf{\Psi}$ étant définie positive, le point m est elliptique. Attention, $2/\sqrt{5}$ n'est pas une valeur commune pour les courbures principales σ_1 et σ_2, car le fait que $\mathbf{\Psi}$ soit une combinaison linéaire de carrés des coordonnées dans la base $\mathscr{B}_f$ ne dit pas que les coefficients de cette combinaison sont les valeurs propres de l'endomorphisme de Weingarten. Tout ce que l'on peut lire sur une expression de $\mathbf{\Psi}$ qui est une combinaison linéaire de carrés des coordonnées dans une base de vecteurs Ψ-orthogonaux, est la signature de la forme $\mathbf{\Psi}$, soit la nature géométrique du point m.

Ce que l'on sait en revanche si $\mathbf{\Psi}$ est une combinaison linéaire de carrés des coordonnées dans une base $(\vec{u}, \vec{v})$, c'est que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs propres de h_m.

Question 5. Pour calculer les valeurs propres σ_1 et σ_2 de h_m, il faut calculer $\mathbf{\Psi}(\vec{u})$ et $\mathbf{\Psi}(\vec{v})$, pour deux vecteurs unitaires et Ψ-orthogonaux $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Le calcul précédent montre que f'_x et f'_y sont deux vecteurs Ψ-orthogonaux, car $\mathbf{\Psi}$ est une somme de carrés. Comme $\|f'_x\| = \sqrt{5}$, $\vec{u} = f'_x/\|f'_x\|$ est de coordonnées $(1/\sqrt{5}, 0)$ dans $\mathscr{B}_f$. D'autre part, f'_y est unitaire. Il s'ensuit que $\mathbf{\Psi}(\vec{u}) = \sigma_1 = 2/5\sqrt{5}$ et $\mathbf{\Psi}(f'_y) = \sigma_2 = 2/\sqrt{5}$.

On peut aussi utiliser directement les formules donnant les courbures principales en fonction des quantités L, M, N, E, F, G.

Question 6. On a $\mathscr{S} \cap Oxz = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; y = 0, z = x^2\}$. Un arc plongé de $\mathbb{R}^3$ dont le support est cette intersection est donc $\gamma : k(t) = (t, 0, t^2), t \in \mathbb{R}$ (le fait que cet arc est plongé résulte de ce que cet arc est cartésien). On sait d'autre part que tout autre arc plongé dont le support est $\mathscr{S} \cap Oxz$ est équivalent à γ.

Calculons la courbure de γ en m, ce qui correspond au paramètre $t = 1$. La paramétrisation k n'est pas normale, on utilise alors la formule

$$\rho(m) = \frac{\|k'(m) \wedge k''(m)\|}{\|k'(m)\|^3}.$$

On a $k'(t) = (1, 0, 2t)$, $k''(t) = (0, 0, 2)$, ce qui donne d'après cette formule, $\rho(m) = 2/5\sqrt{5}$.

On peut aussi remarquer que la courbure normale ρ_n de γ en m relativement à Σ est donnée par $\mathbf{\Psi}(\mathbf{t})$, où $\mathbf{t} = k'/\|k\|$. Donc $\rho_n(m) = \mathbf{\Psi}(\frac{1}{\sqrt{5}} f'_x) = 2/5\sqrt{5}$. D'autre part, comme Oxz contient $\mathbf{N}$, on sait que $|\rho_n| = \rho$. On retrouve donc bien $\rho = 2/5\sqrt{5}$.

Notons $\tilde{\rho}$ la courbure d'un arc paramétré plongé dont le support est $\mathscr{S} \cap \Pi$, où Π est le plan de $\mathbb{R}^3$ passant par m, contenant $\mathbf{N}$ et orthogonal à Oxz. On sait que $\tilde{\rho}_n + \rho_n = \sigma_1 + \sigma_2$, puisque les tangentes de nos deux arcs tracés sur $\mathscr{S}$ sont orthogonales (les deux plans qui leur donnent naissance le sont et ils contiennent $\mathbf{N}$). On en déduit que $\tilde{\rho}_n = \sigma_2 = 2/\sqrt{5}$, et donc que $\tilde{\rho} = |\tilde{\rho_n}| = \sigma_2 = 2/\sqrt{5}$.